

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXV

No. 4

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: B. BROUWER

CONTENTS

- J. W. LANGELAAN: "Ueber die Bestimmung eines Sauerstoff- und Wasserstoff-potentials im Muskelgewebe des Frosches", p. 440.
- ERNST COHEN und C. THÖNNESSEN: "Der Einfluss des Dispersitätsgrades auf physikalisch-chemische Konstanten", p. 441.
- W. J. DE HAAS and P. M. VAN ALPHEN: "The dependence of the susceptibility of bismuth single-crystals upon the field", p. 454.
- R. WEITZENBÖCK: "Über projektive Differentialinvarianten, VI", p. 458.
- R. WEITZENBÖCK: "Über projektive Differentialinvarianten, VII", p. 462.
- R. WEITZENBÖCK und G. H. A. GROSHEIDE F.Wzn: "Die Zerlegung von G_{2m-2} -Komplexen im G_{2m} ", p. 469.
- A. A. NIJLAND: "Mittlere Lichtkurve von langperiodischen Veränderlichen. VII. S Bootis". (With one plate), p. 472.
- F. A. H. SCHREINEMAKERS and J. P. WERRE: "Osmosis in systems, consisting of water and tartaric acid, III", p. 477.
- A. H. BLAAUW, IDA LUYTEN und ANNIE M. HARTSEMA: "Die Grundzahl der Tulpenblüte in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur" I, p. 485.
- G. SCHAAKE: "Eine Eigenschaft der Umlegungen", p. 498.
- J. WOLFF: "Sur l'itération et sur la fonction de KÖNIGS". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 502.
- O. BOTTEMA: "Die linearen Komplexe in der nicht-Euklidischen Geometrie" I. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 507.
- J. M. STORCH: "Der Basissatz für endliche ABELSche Gruppen". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 522.
- D. VAN DANTZIG: "Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie I. Einordnung in die Affingeometrie". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 524.
- D. VAN DANTZIG: "Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. II. X_{n+1} mit eingliedriger Gruppe". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 535.
- J. POPKEN: "Ueber einigen Determinanten". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 542.
- M. WOLF: "Measurements of the absorption coefficient for X-rays in the neighbourhood of the L-edges of the elements Pt and Au". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 547.

- E. MATHIAS, C. A. CROMMELIN, W. J. BIJLEVELD et PH. P. GRIGG: "La courbe des densités du liquide et de la vapeur saturée et le diamètre rectiligne de l'oxyde de carbone". (Communicated by Prof. W. H. KEESOM), p. 551.
- H. P. BERLAGE JR.: "On the structure and internal motion of the gaseous disc constituting the original state of the planetary system". (Communicated by Prof. H. A. KRAMERS), p. 553.
- E. H. BÜCHNER, ANDR. VOET und E. M. BRIJNS: "Lyotrope Zahlen und Ioneneigenschaften". (Communicated by Prof. A. F. HOLLEMAN), p. 563.
- E. H. BÜCHNER, E. M. BRIJNS und J. H. C. MERCKEL: "Lyotrope Zahlen und Viskosität". (Communicated by Prof. A. F. HOLLEMAN), p. 569.
- P. M. ROGGEVEEN: "Tektonik des Zinnerzgrubengebietes von Klappa-Kampit, Billiton, Niederländisch Ost-Indien". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 575.
- P. M. ROGGEVEEN: "Mesozoisches Koniferenholz (Protocupressinoxylon malayense n.s.) von der Insel Soegi im Riouw-Archipel, Niederländisch Ost-Indien. (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 580.
- G. L. SMIT SIBINGA: "The tertiary virgations on Java and Sumatra, their relation and origin". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER), p. 584.

Histology. — *Ueber die Bestimmung eines Sauerstoff- und Wasserstoffpotentials im Muskelgewebe des Frosches.* Von J. W. LANGELAAN.

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Um zu einer gewissen Erfassung des Intensitätsfaktors beim Stoffwechsel des Froschmuskels zu gelangen, wurde versucht, diesen, unter Verwendung geeigneter Elektroden, durch ein Potentialniveau zu kennzeichnen. Die Untersuchung erwies nun, dass zwei von solchen Niveaus zu unterscheiden sind: Das höher gelegene Niveau befindet sich bei $+0.37$ Volt, verglichen mit der Wasserstoffnormalelektrode. Der gefundene Wert bildet den Mittelwert von fünf Beobachtungen. Ferner ergab sich, dass die Grösse dieses Potentials von der H-Ionenkonzentration der Phosphatlösung abhängt, in der sich das Gewebe befindet. Der Wert von 0.37 Volt entspricht einem p_H in der Nähe von 7.8 . Eine Serie von 9 Beobachtungen in der Nähe von p_H 8.5 liefert einen Mittelwert von $+0.32$ Volt, während bei einem p_H von ca. 7.2 als Mittelwert von 6 Beobachtungen $+0.35$ Volt gefunden wird.

Das niedrigere Niveau liegt bei -0.34 Volt bei einem p_H von 7.6 (Mittelwert von 6 Beobachtungen). Wenn das p_H in der Nähe von 9 liegt, findet man als Mittelwert von 9 Beobachtungen -0.32 Volt; für p_H 7.1 , als Mittel von 7 Beobachtungen, -0.28 Volt. Diese Bestimmungen wurden sämtlich bei einer Temperatur von ca. 20°C . ausgeführt.

Die mikroskopische Untersuchung des Verhaltens des Muskelgewebes in den Phosphatlösungen, in denen die Potentialmessungen ausgeführt sind, lehrt nun, dass die verwandten Lösungen nahezu isotonisch sind. Ferner ergab sich, dass das Muskelgewebe in den Lösungen am längsten (ca. 3 Stunden) seine normale Struktur beibehält, deren p_H dem mittleren p_H des Muskelgewebes am nächsten steht; dies sind die Lösungen mit den p_H 7.6 und 7.8 . In den anderen Lösungen kommt die normale Gewebestruktur

schneller zum Verschwinden. In dieser Hinsicht erweisen sich Lösungen mit einem p_H von ca. 8.5 und 9 als weniger schädlich als solche mit einem p_H von 7.1 und 7.2. Aus diesen Beobachtungen sowie aus den Zeitverhältnissen bei den Versuchen ergibt sich, dass die maximalen Werte der beiden Potentiale nur dann gefunden werden, wenn sich in der Nähe der Elektrodenoberfläche eine hinreichende Menge von strukturell normalem Muskelgewebe befindet.

Sowohl die angewandte Methode, wie der Verlauf der Untersuchung, machen es höchst wahrscheinlich, dass wir es in diesen Versuchen nicht mit einem einfachen Oxydoreduktor als potentialbestimmender Substanz zu tun haben. Die Differenz der beiden Potentialniveaus von 0.70 Volt macht dies gleichfalls unwahrscheinlich. Wir dürften vielmehr anzunehmen haben, dass das höhere Potential durch eine Sauerstoffkonzentration im Muskelgewebe bestimmt wird, das niedrigere Potential hingegen durch eine Wasserstoffkonzentration. In diesem Falle charakterisiert das Potentialniveau von +0.37 Volt den Warburg-Mechanismus, während das Potential von -0.34 Volt die Dehydrierungsreaktion des Wieland-Chemismus kennzeichnet.

Amsterdam, *Histologisches Laboratorium*.

Chemistry. — *Der Einfluss des Dispersitätsgrades auf physikalisch-chemische Konstanten.* Von ERNST COHEN und C. THÖNNESSEN.

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Im Jahre 1931 veröffentlichten ERNST COHEN und H. GOEDHART¹⁾ eine Arbeit, in welcher die Vermutung ausgesprochen wurde, dass die Salizylsäure in zwei verschiedenen Modifikationen auftreten kann. Gestützt wurde diese Annahme durch die gefundene Tatsache, dass einerseits chemisch reine Salizylsäure bei gegebener Temperatur verschieden hohe Löslichkeit besitzen kann und andererseits dadurch, dass es gelang, dieselbe durch Zerreiben im Mörser oder durch 400-stündiges Erhitzen im Trockenschrank bei 75° C. zu stabilisieren, wonach ihre Löslichkeit einen tiefsten Wert erhielt.

H. GOEDHART²⁾ hat später im van 't Hoff-Laboratorium dieses Problem weiter verfolgt; es gelang ihm Salizylsäure mit wesentlich höherem Gehalt an metastabiler Phase herzustellen, indem er dieselbe bei etwa 110° C. der Sublimation im Kathodenlichtvakuum unterwarf. Er fand so als höchste Löslichkeit bei 25.00° C. den Wert 0.231⁵, wogegen die Löslichkeit der stabilen Säure bei 25.00° C. 0.221⁷ g Salizylsäure pro 100 g H₂O beträgt. Röntgenogramme der so hergestellten Säure lieferten jedoch überraschen-

¹⁾ Proc. Acad. Sci. Amsterdam **34**, 1 (1931).

²⁾ Dissertation, Utrecht, 1932.

derweise keine von denjenigen der stabilen Säure qualitativ verschiedenen Bilder. Vielmehr zeigte sich beim Vergleich, dass die charakteristischen Linien lediglich breiter geworden waren. Hieraus zog H. GOEDHART, im Gegensatz zu der von ERNST COHEN und GOEDHART in ihrer genannten Arbeit ausgesprochenen Meinung, den Schluss, dass die beobachteten Löslichkeitsunterschiede nicht durch die Existenz polymorpher Formen sondern durch Unterschiede des Dispersitätsgrades erklärt werden müssten. Da es bekannt ist ¹⁾, dass Gemische polymorpher Formen mindestens 10—15 % der zweiten Form enthalten müssen, damit die Röntgenanalyse deren Vorhandensein anzeigt, blieb die Möglichkeit bestehen, dass ein derartiger Fall hier vorliegt. Weiterhin mangelte es noch an dem Versuch, der die Richtigkeit dieser neuen Erklärung in überzeugender Weise bewies. Wir haben daher die betreffende Untersuchung fortgesetzt um eine endgültige Entscheidung zwischen beiden Annahmen (Polymorphie oder Dispersität) treffen zu können.

1. Ueber die Ausführung der Löslichkeitsbestimmungen ist in der genannten Abhandlung von ERNST COHEN und H. GOEDHART bereits alles erforderliche gesagt worden. Hinzufügen möchten wir nur noch, dass bei all unseren Bestimmungen stets, wenn nicht anders ausdrücklich bemerkt, eine Schütteldauer von 2 Stunden gewählt wurde. Zu dieser kurzen Zeit hatten wir uns entschlossen, damit die Salizylsäure sich beim Schütteln mit ihrer wässrigen Lösung möglichst wenig stabilisieren konnte. Löslichkeitsbestimmungen an stabiler Salizylsäure lieferten nach 2 Stunden Schüttelzeit, sowohl von der ungesättigten als auch von der schwach übersättigten Seite her den gleichen Wert, nämlich

$$0.2217 \pm 0.0007 \text{ g Säure/100 g H}_2\text{O bei } 25.00^\circ \text{ C.}$$

Für alle Untersuchungen wurde Salizylsäure „für kalorimetrische Bestimmungen“ der Firma KAHLBAUM und Salizylsäure, puriss. cryst. grave der Firma POULENC (Usines du Rhône) benutzt.

2. Unsere ersten Löslichkeitsbestimmungen führten wir mit Proben aus den Standflaschen aus. Tabelle 1 und 2 enthalten einige von den zahlreichen Bestimmungen.

Diese Tabellen zeigen, dass die Löslichkeitswerte stärker voneinander abweichen als die durch die Analysenmethode bedingte Fehlergrenze es erlaubt. Durch zahlreiche Bestimmungen an wirklich einheitlichem Material haben wir uns davon überzeugt, dass die methodischen Fehler höchstens $\pm 0.0007 \%$ ausmachen können. Das Material in den Standflaschen musste demnach inhomogen sein. Naturgemäss haben wir zunächst an *chemische* Inhomogenität gedacht, also an geringe Quantitäten chemischer Verunreinigungen, welche die Löslichkeit beeinflussen. Deshalb kristallisierten wir die Salizylsäure aus beiden Flaschen häufig (bis zu 10 mal) aus

¹⁾ N. H. KOLKMEIJER, Z. physik. Chem. (A) **136**, 45 (1928).

TABELLE 1.
Temperatur 25.00° C.

Versuchsnummer	Herkunft der Säure	g Salizylsäure pro 100 g H ₂ O
60	Kahlbaum	0.223 ⁵
61	"	0.226 ²
62	"	0.224 ⁶
64	Usines du Rhône	0.222 ⁷
65	"	0.221 ⁶

TABELLE 2.
Temperatur 0.0° C.

1	Usines du Rhône	0.089 ⁷
2	" " "	0.091 ⁷
3	" " "	0.090 ⁵
7	Kahlbaum	0.092 ⁶
8	"	0.090 ⁹
9	"	0.092 ⁰

Wasser um. Zu diesem Zweck lösten wir die Säure in der 30-fachen Menge Wasser durch kurzes Erhitzen bis auf etwa 90° C., filtrierten die Lösung (durch Watte) und liessen dieselbe über Nacht im Schrank zur Kristallisation stehen. Löslichkeitsbestimmungen an solchen gereinigten Säuren, ebenfalls in grosser Zahl ausgeführt, gaben wiederum die gleichen Schwankungserscheinungen. Es war daher unwahrscheinlich, dass die zweifellos vorhandene Inhomogenität des Materials durch *chemische* Verunreinigungen verursacht wurde. Diese merkwürdigen Schwankungserscheinungen dürften z.T. die Erklärung sein für die Abweichungen, die bei gegebener Temperatur zwischen den Löslichkeitsbestimmungen verschiedener Autoren vorliegen.

3. Der Einwand, dass die Schwankungen auf chemische Verunreinigungen zurückzuführen seien, ist von M. BECKERS ¹⁾ erhoben worden. Wir haben daher den Einfluss, den Verunreinigungen auf die Löslichkeit der Salizylsäure ausüben können, systematisch geprüft. Nach der Herstellungsweise der Salizylsäure wäre es denkbar, dass dieselbe mit ihren Isomeren, insbesondere mit *p*-Oxybenzoesäure, sowie mit Phenol oder Salol verun-

¹⁾ Bull. Soc. chim. Belg. 40, 518 (1931).

reinholt ist. Die *p*-Oxybenzoesäure besitzt eine bedeutend höhere Löslichkeit als Salizylsäure, sodass sie beim häufigen Umkristallisieren der letzteren aus grossen Mengen Wasser in Lösung bleiben muss. Wie aber oben bereits gesagt, zeigt auch eine sogar 10 mal aus der 30-fachen Menge Wasser umkristallisierte Säure noch die gleichen Schwankungen ihrer Löslichkeit.

Wir bestimmten dieselbe von Salizylsäure in 0.1 %iger Phenollösung und fanden bei 25.00° C.

$$0.224^8 \text{ bzw. } 0.224^6$$

also tatsächlich eine geringe Erhöhung. Diese Lösungen zeigten jedoch einen ausgesprochenen Geruch nach Phenol, was bei unseren sonstigen Lösungen niemals der Fall war. Wenn also die Salizylsäure in unserer Standflasche wirklich mit Phenol verunreinigt gewesen wäre, hätten die dadurch auftretenden Schwankungen bei den Löslichkeitsbestimmungen nie so gross sein können, wie wir sie gefunden haben.

Salizylsäure, der 5 % Salol zugesetzt war, besass die Löslichkeit 0.221⁰ bzw. 0.220⁸ bei 25.00° C. Mithin war die Ursache für die beobachteten Schwankungen auch nicht in einer Verunreinigung durch Salol zu suchen.

Durch Einwägen der über P₂O₅ getrockneten Salizylsäure und Titration derselben mit eingestellter Barytlauge fanden wir für das Molekulargewicht stets den Wert 138.1 während der berechnete 138.05 beträgt.

Den wichtigsten Beweis aber dafür, dass die beobachteten Schwankungen nicht auf *chemische* Verunreinigungen zurückgeführt werden können, erblicken wir in den unter § 4 beschriebenen Versuchen.

4. Es gelingt, Salizylsäure durch geeignete Behandlung, bei welcher der Salizylsäure fremde Stoffe weder entzogen noch zugeführt werden, in eine vollkommen homogene Substanz zu überführen, d.h. in eine Substanz, die bei Löslichkeitsbestimmungen stets bei bestimmter Temperatur den gleichen und gleichzeitig tiefsten Wert der Löslichkeit ergibt. Nach H. GOEDHART¹⁾ tritt diese Stabilisierung bei 400-stündigem Erhitzen auf 75° C. ein. Geruchsvergleiche zeigten, dass unter diesen Umständen Salizylsäure (besonders wenn sie Spuren von Feuchtigkeit enthielt) sich in geringem Masse zu Phenol zersetzte. Deshalb schlugen wir zum Stabilisieren einen anderen Weg ein, der zudem in wesentlich kürzerer Zeit zum gleichen Ziele führte. Die Salizylsäure wurde mit Wasser in einer verschlossenen Schüttelflasche 48 Stunden bei ca. 50° C. geschüttelt. Hierauf brachten wir die Flasche wieder in den Thermostaten von 25° C. und schüttelten dieselbe, wie üblich, 2 Stunden. Tabelle 3 gibt einige Resultate der so ausgeführten Löslichkeitsbestimmungen an Salizylsäuren verschiedener Herkunft.

Diese Zahlen zeigen mit Sicherheit, dass Stabilisieren möglich ist, und dass daher *chemische* Verunreinigungen nicht die Ursache für die beobach-

¹⁾ Dissertation Utrecht 1932, Seite 28 ff.

TABELLE 3.

Löslichkeit nach vorangegangener Stabilisierung bei 50° C.
Temperatur 25.00° C.

Versuchsnummer	Herkunft der benutzten Säure	Löslichkeit
140	Kahlbaum	0.222 ²
141	"	0.221 ⁹
143	"	0.222 ⁰
158	Usines du Rhône	0.221 ⁶
159	" " "	0.221 ²
180	Kahlbaum, 6 Mal aus H ₂ O umkristallisiert	0.221 ⁵
182	Kahlbaum, 6 Mal aus H ₂ O umkristallisiert	0.221 ⁷

teten Schwankungen sein können. Die Inhomogenität kann daher nur physikalischer Art sein. Hier kommen nun folgende Annahmen in Frage:

a. Die Salizylsäure tritt unter den obwaltenden Verhältnissen in polymorphen Formen auf. Die käufliche Säure, sowie die aus Wasser umkristallisierte, enthält, je nach ihrer Vorgeschichte, mehr oder weniger grosse Mengen der metastabilen Phase, die ungleichmässig durch die gesamte Masse der Säure verteilt ist, wodurch sich dann die unregelmässig schwankenden Löslichkeitswerte solcher Präparate erklären liessen.

b. Die Salizylsäure enthält, je nach ihrer Vorgeschichte, wechselnde Mengen von so geringer Kristallgrösse, dass die von der Thermodynamik geforderte höhere Löslichkeit derselben in Erscheinung tritt. In diesem Falle müsste die Kristallisationsgeschwindigkeit der Salizylsäure so gering sein, dass die kleinen Kristalle innerhalb der Zeiträume, die wir zu unseren Löslichkeitsbestimmungen benutzten, sich nicht in nennenswertem Betrage vergrössern.

5. Um zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, haben wir zunächst versucht, eine Salizylsäure von möglichst hoher Löslichkeit, also mit möglichst grossem Gehalt an metastabiler Phase (diesen Begriff in weiterem Sinne genommen) herzustellen. H. GOEDHART hatte beim Sublimieren im Kathodenlichtvakuum unter Anwendung von flüssiger Luft als Kühlmittel eine Säure von der maximalen Löslichkeit 0.231⁵ erhalten. Offenbar wird beim Sublimieren die Bildung der metastabilen polymorphen bzw. der feindispersen Phase dadurch begünstigt, dass der Dampf an der kalten Gefässwand abgeschreckt wird. Es lag nahe, das gleiche Verfahren auf wässrige Lösungen der Salizylsäure zu übertragen. Zu diesem Zwecke wurden heisse, gesättigte, wässrige Lösungen der Säure durch schnelles Eintauchen in das Wasser des Thermostaten abgeschreckt. Schon die

ersten Versuche ergaben eine wesentliche Erhöhung der Löslichkeit, sodass es lohnend erschien, in dieser Richtung weiterzusuchen.

6. Diese Versuche hatten auch gezeigt, dass die Löslichkeit der durch Abschrecken erhaltenen Salizylsäure um so grösser war, je höher die Temperatur und daher die Konzentration der gesättigten Lösung vor dem Abschrecken. Vergleiche Tabelle 4.

TABELLE 4.

Versuchsnummer	Temperatur in C° der gesättigten Lösung vor dem Abschrecken	Löslichkeit der Säure bei 25.00° C. nach dem Abschrecken
162	ca. 50	0.222 ³
164	70	0.227 ¹
166	90	0.238 ⁰

Es war mit der Möglichkeit zu rechnen, dass Kristalle, die vor dem Abschrecken noch ungelöst in der Lösung umherschwammen, beim Abkühlen eine Keimwirkung ausüben und dadurch die Chancen für die beabsichtigte Bildung der metastabilen Phase verringern konnten. Deswegen benutzten wir bei den folgenden Versuchen den nachstehend beschriebenen Apparat (Fig. 1), der auch für andere ähnliche Fälle noch Nutzen leisten könnte.

In den weiten Glaszylinder *A* tritt bei *M* Wasserdampf ein. Er umspült die Gefässe *B* und *C* und hält deren Temperatur auf etwa 100° C. In das Gefäss *B* bringt man Salizylsäure und Wasser. Durch häufiges Umrühren mit dem Glasrührer *R* erhält man nach etwa 40 Minuten eine bei etwa 100° C. gesättigte Salizylsäurelösung. Hebt man nun den Glasstab *G*, der an seinem unteren Ende *D* mit einem Schliff versehen ist, so fließt die Lösung über das Wattefilter *F* durch das Rohr *E* in die Flasche *C*, die mit dem oberen Teil der Apparatur durch einen Gummiring verbunden ist. Das Rohr *N* sorgt für den Druckausgleich zwischen dem Innern der Flasche *C* und der Atmosphäre. Nach Beendigung der Filtration lässt sich der innere Teil des Apparates vermittels des Stopfens *H* herausheben und die Flasche *C* kann losgelöst und deren Inhalt zu beliebigen Versuchen benutzt werden.

Auf diese Weise erhielten wir eine vollkommen klare, bei etwa 100° C. gesättigte Lösung von Salizylsäure. Die Flasche *C* wurde verschlossen und schnell

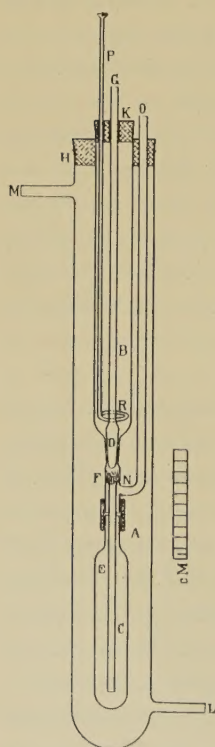


Fig. 1.

in den Thermostaten von 25° C. gebracht und geschüttelt. Nach 2 Stunden bestimmten wir die Löslichkeit. Tabelle 5 enthält einige Resultate.

TABELLE 5.

Versuchsnummer	Herkunft der benutzten Säure	Löslichkeit bei 25.00° C.
200	Usines du Rhône	0.246 ⁵
201	" " "	0.245 ⁵
207	Kahlbaum	0.241 ⁸
208	"	0.244 ⁷

7. TH. PAUL¹⁾ hat ähnliche Beobachtungen bei Löslichkeitsbestimmungen an Salizylsäure u.a. Stoffen gemacht als er derartige Messungen, ausgehend von der übersättigten Seite, ausführte. Er hat seine Versuche aber in anderer Weise gedeutet, und zwar nahm er an, dass beim Abschrecken von Salizylsäurelösungen diese mit grosser Hartnäckigkeit übersättigt bleiben. Trifft das tatsächlich zu, so sind die in Tabelle 5 enthaltenen hohen Zahlen nicht auf einen Gehalt des Bodenkörpers an metastabiler Phase sondern auf diese Uebersättigung zurückzuführen. Die Richtigkeit der Erklärung von TH. PAUL konnten wir jedoch auf folgende Weise widerlegen.

Es wurden 100 g bei etwa 100° C. gesättigter Salizylsäurelösung in der oben geschilderten Weise abgeschreckt. Hierauf schüttelte man 20 Minuten. Nach dieser Zeit war die Temperatur im Innern der Flasche bereits auf 25.00° C., die Temperatur des Thermostaten, gefallen. Der Flasche entnahmen wir sodann eine kleine Menge Lösung und ermittelten deren Konzentration durch Titration. Dann wurde so viel reines Wasser dem in der Flasche verbliebenen Rest (Lösung + Bodenkörper) zugesetzt, dass die Lösung (die nach PAUL übersättigt sein sollte) die dem normalen Löslichkeitswert von 0.221⁷ entsprechende Konzentration erhielt. Hiernach wurde 2 Stunden weitergeschüttelt und die Löslichkeit wiederum bestimmt. Wenn die Annahme PAUL's zu Recht besteht, hätten diese Bestimmungen normale Löslichkeiten ergeben müssen. Tatsächlich aber fanden wir hohe Werte obwohl die Sättigung jetzt von *tieferer* Konzentration aus erreicht war. Nachfolgend zwei unserer Versuche: (Siehe Tabelle folgende Seite.)

Diese Versuche lehren zweifelsfrei, dass die Ursache für die hohe Löslichkeit der Salizylsäure, die durch Abschrecken heisser gesättigter Lösungen gewonnen wurde, nicht in einem besonderen Uebersättigungszustand der Lösung sondern in der Beschaffenheit des Bodenkörpers zu suchen ist. PAUL sagt: „Es kommt häufig vor, dass Löslichkeitsbestimmungen nur durch Abkühlen (unter öfterem Schütteln) der übersättigten Lösungen

¹⁾ Z. physik. Chem. **14**, 112 (1894).

TABELLE 6.

Versuchsnummer	197	199
Löslichkeit nach dem Abschrecken und 20 Minuten Schütteln	0.245 ⁵	0.246 ⁵
Durch Verdünnen gebracht auf	0.221 ⁰	0.221 ⁰
Löslichkeit nach weiterem 2-stün- digem Schütteln bei 25.00° C.	0.241 ⁸	0.241 ⁵

ausgeführt werden. Dieses Verfahren ist sonach unzuverlässig. Vielleicht lässt sich hierdurch teilweise die oft sehr erhebliche Abweichung der Löslichkeitsangaben in der Literatur erklären". Diese Sätze bleiben natürlich nach wie vor gültig.

8. Ein auf die unter § 7. beschriebene Weise hergestelltes Salizylsäurepräparat wurde röntgenographiert. Für die Existenz einer polymorphen Form ergab sich kein Anhaltspunkt. Danach erschien Polymorphie nur noch wenig wahrscheinlich.

9. Wir versuchten deshalb, die hohen Löslichkeiten von Salizylsäure dadurch zu erreichen, dass *stabile* Salizylsäure in geeigneter Weise zerrieben wurde. Sollte es auf diese Weise möglich sein, metastabile Produkte zu erhalten, so wäre nur noch Erklärung durch Annahme verschiedenen Dispersitätsgrades möglich.

Zerreiben der Säure im Achatmörser hatte auf die Löslichkeit keinen Einfluss. Die Versuche GOEDHART's in dieser Richtung¹⁾ hatten kein eindeutiges Resultat. Er fand nach dem Zerreiben bald eine geringe Abnahme, bald eine geringe Zunahme der Löslichkeit. Wie oben gezeigt wurde, arbeitete er mit einem Material, in dem die metastabile Phase ungleichmässig verteilt war, sodass er naturgemäss nur Zufallswerte erhalten konnte.

Stabilisierte Salizylsäure mit einem Anfangswert der Löslichkeit von 0.221⁷ bei 25.00° C. wurde mit Wasser 24 Stunden bei dieser Temperatur geschüttelt. In die Schüttelflasche waren zu Beginn gleichzeitig Porzellanperlen hineingegeben worden. Dieselben hatten wir vorher durch Auskochen mit Wasser bis zur neutralen Reaktion des Waschwassers gereinigt. Schon das Aussehen der Säure verriet uns am folgenden Tage, dass die groben Kristalle zu einem äusserst feinen Kristallmehl, das mit der Lösung einen Brei von fast pastenartiger Beschaffenheit bildete, zermahlen worden waren. Die Konzentration der filtrierten Lösung ergab sich zu 0.233¹ bzw. 0.234⁵. Das Schütteln mit Porzellankugeln wurde daraufhin über längere Zeiträume fortgesetzt in der Erwartung, dass man in dieser Weise zu noch

¹⁾ Dissertation Utrecht, z.B. Tabellen 3, 17.

höheren Werten der Löslichkeit gelangen würde. Tabelle 7 enthält einige unserer Resultate.

TABELLE 7.
Temperatur 25.00° C.

Versuchsnummer	Schütteldauer in Stunden	Löslichkeit nach dem Schütteln mit Porzellanperlen
212	24	0.234 ⁵
214	48	0.244 ¹
215	48	0.249 ²
217	120	0.248 ⁸
224	264	0.242 ⁰

10. Von Interesse war auch die Frage, ob es möglich war, die durch Zerreiben mit Porzellanperlen an feindisperser Phase angereicherte Salizylsäure wieder zu stabilisieren, sodass die Säure ihre normale Löslichkeit zurückerhielt. Zu diesem Zweck wurden in der bereits geschilderten Weise die Schüttelflaschen nach Entnahme einer Probe zur Analyse, *ohne* Porzellanperlen 48 Stunden bei 50° C. weitergeschüttelt. Hiernach brachten wir sie in den Thermostaten von 25.00° C. zurück und bestimmten nach 2 Stunden die Konzentration der Lösung. Tabelle 8 enthält die gefundenen Werte.

TABELLE 8.
Temperatur 25.00° C.

Versuchsnummer	218	219
Anfangswert der Löslichkeit	0.222 ⁹	0.222 ⁶
Löslichkeit nach dem Zerreiben mit Porzellanperlen	0.244 ¹	0.249 ²
Löslichkeit nach dem Stabilisieren	0.223 ⁵	0.223 ¹

11. Nachträglich möchten wir noch bemerken, dass die bei den Versuchen mit Porzellanperlen zur Analyse benutzten Lösungen nach dem Filtrieren stets etwas trübe waren. Das erklärt sich dadurch, dass die Porzellanperlen sich beim Schütteln auch gegenseitig abreiben. Die abgeriebene Masse geht dann z.T. kolloid in Lösung. Möglich wäre nun, dass eine solche Kolloidlösung beim Titrieren zu falschen Werten für den Salizylsäuregehalt der Lösungen führt. Dies ist aber nicht der Fall, wie wir folgenderweise nachweisen konnten: Porzellanperlen wurden mit Wasser

allein 24 Stunden geschüttelt. Die trübe Lösung erwies sich bei der Prüfung als vollkommen neutral.

Veranlasst durch eine kürzlich erschienene Mitteilung von H. BRINTZINGER und H. G. BEIER ¹⁾, in welcher nachgewiesen wird, dass die Löslichkeit der Salizylsäure durch die Gegenwart hydrophiler Sole erhöht wird, untersuchten wir auch den evtl. Einfluss der kolloiden Trübung in dieser Richtung. Zu diesem Zwecke wurden wiederum Porzellanperlen 24 Stunden mit Wasser allein geschüttelt. Die stark getrübe Lösung verwendeten wir dann mit stabiler Säure zu einer Löslichkeitsbestimmung und zwar wurde diesmal 24 Stunden geschüttelt. Es ergaben sich die Werte 0.226⁶ und 0.226⁵ bei 25.00° C. Tatsächlich wird also die Löslichkeit der Salizylsäure im Sinne von BRINTZINGER und BEIER um wenig erhöht. Die Werte liegen aber weit unter den in Tabelle 7 und 8 angegebenen, sodass die in jenen Tabellen beschriebenen Erscheinungen mit den von diesen Autoren beobachteten nichts zu tun haben.

12. Immerhin erschien es zweckmässig, nach einem Material zu suchen, das die eventuell störenden Eigenschaften der Porzellanperlen nicht besass. Gold, in Form kleiner Kugeln von ca. 3 mm Durchmesser, erwies sich als dafür sehr geeignet. Durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Dr. W. J. VAN HETEREN, Chef-Chemiker der Reichsmünze hierselbst, welcher uns eine grössere Menge reinsten Goldes zur Verfügung stellte, wurden wir in Stand gesetzt, Versuche mit diesem Material auszuführen. Zwar zerreiben sich auch Goldkugeln in geringem Masse, wenn man sie mit Wasser in Flaschen schüttelt, doch wirken, wie sich unten noch zeigen wird, die in der Lösung herumschwimmenden Goldflitterchen in keiner Weise störend. Tabelle 10 gibt einige unserer Resultate bei diesen Versuchen wieder.

TABELLE 9.
Temperatur 25.00° C.

Versuchsnummer	Schütteldauer in Stunden	Löslichkeit nach dem Schütteln mit Goldkugeln
248	24	0.252 ⁷
249	72	0.244 ⁷
251	24	0.245 ⁰
255	24	0.252 ⁰

Auch hier haben wir untersucht, ob die kleinen Mengen von feinverteiltem Gold, die sich durch Zerreiben bilden, einen direkten Einfluss auf die Löslichkeit ausüben können. Es wurde in gleicher Weise wie bei dem entsprechenden Versuch mit Porzellanperlen gearbeitet, und es ergab sich

¹⁾ Naturwiss. 20, 255 (1932).

für die Löslichkeit der Salizylsäure in Gegenwart von feinverteiltem Gold im Bodenkörper der Wert 0.224¹ bzw. 0.223⁷. Diese Zahlen liegen weit unter den bei den obigen Versuchen (Tabelle 9) gefundenen. Ohne weiteres liess sich vorhersehen, dass der endgültige Wert der Löslichkeit beim Schütteln mit Goldkugeln abhängig sein musste von der Intensität des Schüttelns, also u.a. von der Schüttelgeschwindigkeit, der Anzahl der benutzten Goldkugeln und der Bodenkörpermenge. Wir haben Versuche mit gleicher Goldkugelnzahl aber wechselnden Bodenkörpermengen angestellt. Die Resultate finden sich in Tabelle 10.

TABELLE 10.
Temperatur 25.00° C.

Versuchsnummer	Bodenkörpermenge	Löslichkeit nach 24-stündigem Schütteln mit konstanter Anzahl von Goldkugeln
226	1 g	0.238 ⁹
227	4 g	0.245 ⁰
228	6 g	0.248 ³

Doch haben wir diese Seite nicht weiter verfolgt, da sie ausserhalb unserer Interessen lag. Jedenfalls wird nach dem Ausgeführten verständlich, dass bei unseren Versuchen sich nicht stets der gleich hohe Wert für die Löslichkeit ergab, denn vor allen Dingen variierte bei den Versuchen häufig die Schüttelgeschwindigkeit.

13. Es kann nach alledem als sicher gelten, dass die Schwankungserscheinungen, die sich bei Löslichkeitsbestimmungen an Salizylsäure bemerkbar machen, auf geringe in der Gesamtmasse ungleichmässig verteilte Mengen von äusserst feindispersen Material zurückzuführen sind. Dieser durch die Teilchengrösse bedingte Effekt tritt besonders an solchen Präparaten in Erscheinung, bei deren Herstellungsweise die Chancen für die Entstehung kleiner Teilchen gross sind, d.h. also besonders an sublimierten Präparaten und an solchen, die durch Abschrecken ihrer heissen wässrigen Lösungen gewonnen wurden. Die „Salizylsäure für kalorimetrische Bestimmungen“ der Firma KAHLBAUM ist, wie uns die Firma mitteilte, durch mehrfache Sublimation gereinigt. Und gerade an diesem Präparat traten bei Löslichkeitsbestimmungen diese Schwankungen am stärksten zu Tage. Es wäre denkbar, dass auch die Verbrennungswärme dieses Präparates solche Schwankungen zeigt. Dies würde dann gegen die Verwendung der Salizylsäure als sekundäre kalorimetrische Standardsubstanz, wozu sie in den letzten Jahren insbesondere von P. E. VERKADE und J. COOPS Jr.¹⁾ vorgeschlagen wurde, sprechen. Wahrscheinlich aber wird schon der

¹⁾ Rec. trav. chim. 43, 561 (1924).

Druck, mit dem die Salizylsäure für kalorimetrische Versuche zu Pastillen gepresst wird, genügend gross sein um die durch den verschiedenen Dispersitätsgrad hervorgerufenen Energiedifferenzen zum Verschwinden zu bringen ¹⁾. Hier ist jedoch eine Untersuchung noch notwendig. Stets wird es aber möglich sein, die Salizylsäure durch die oben angegebene Methode zu stabilisieren oder ihr durch mehrmaliges Schütteln mit Wasser die kleinsten, störenden Kristalle zu entziehen.

14. Bei der bisherigen Praxis der Löslichkeitsbestimmungen ist der Umstand, dass sich Teilchengrösseneffekte bemerkbar machen können, nur als seltener Ausnahmefall beobachtet worden. Wir haben willkürlich einige andere organische Stoffe herausgegriffen und ihre Löslichkeit bestimmt. Gleichzeitig haben wir eine Probe derselben Stoffe mit Goldkugeln in der oben beschriebenen Weise geschüttelt. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 11.

TABELLE 11.
Schüttelzeit: 24 Stunden.

	Löslichkeit bei 25.00° C.	Löslichkeit des mit Goldkugeln zerriebenen Bodenkörpers.
o-Nitrobenzoesäure	0.731 ⁵	0.756 ⁸
Acetylsalizylsäure	0.411 ⁵	0.460 ⁷
Phtalsäure	0.704 ⁵	0.712 ⁰

An diesen vorläufigen Versuchen sieht man den Einfluss des Dispersitätsgrades sehr deutlich, und es erscheint uns die Annahme nicht unge-rechtfertigt, dass es sich um eine sehr häufige, bisher noch nicht genügend berücksichtigte Erscheinung handelt. Die Differenzen zwischen den von verschiedenen Autoren gefunden Löslichkeitswerten derselben Substanz bei gegebener Temperatur dürften z.T. so erklärbar sein. Im allgemeinen findet man in der Literatur über die Art der Vorbehandlung der untersuchten Stoffe, insbesondere darüber ob sie beim Umkristallisieren oder Sublimieren schnell oder langsam gekühlt wurden, nur spärliche Angaben, da man dieser Frage, wenn nicht die Vermutung für die Existenz polymorpher Formen vorlag, nur wenig Bedeutung zumass. Denn die bisher beobach-teten Fälle, bei denen sich ein Einfluss des Dispersitätsgrades auf die Lös-lichkeit nachweisen liess ²⁾, waren bisher so wenige, dass sie allgemein den Eindruck von Ausnahmen gemacht haben. Von Interesse dürfte auch die Frage sein, um welche Beträge andere physikalisch-chemische Konstanten als die Löslichkeit durch den Teilchengrösseneffekt beeinflusst werden. Es

¹⁾ Das würde mit den Anschauungen von M. BECKERS, Bull. Soc. Chim. de Belgique, 40, 518 (1931), speziell Seite 561 und 562, übereinstimmen.

²⁾ Vergl. Literatur bei GOEDHART, Dissertation Utrecht 1932, Seite 18.

liegen in der Literatur schon Angaben hierüber vor. Genannt seien hier nur die Arbeiten von LIPSETT, JOHNSON und MAASS¹⁾ über den Einfluss der Korngrösse auf die Lösungswärme des Chlornatriums, die von CENTNERSZWER und seiner Mitarbeiter über die Dissoziationsspannung verschiedener Stoffe²⁾ sowie diejenige von FRICKE und WULLHORST³⁾ über die Lösungswärme kristallisierter Hydroxyde.

Zu der Forderung, dass bei der Bestimmung physikalisch-chemischer Konstanten mit der Möglichkeit der Existenz polymorpher Formen gerechnet werden muss, tritt also als weitere die hinzu, dass auch der Dispersitätsgrad des Materials zu berücksichtigen ist und durch geeignete Vorbehandlung evtl. Fehlermöglichkeiten beseitigt werden müssen.

ZUSAMMENFASSUNG.

1. Die von H. GOEDHART auf Grund röntgenographischer Befunde ausgesprochene Vermutung, dass die an Salizylsäure auftretenden Löslichkeitsdifferenzen auf den Dispersitätsgrad derselben zurückzuführen sind, konnte dadurch bewiesen werden, dass es gelang, feindisperse Salizylsäure von etwa 15 Prozent höherer Löslichkeit sowohl von der molekulardispersen als auch von der grobdispersen Seite her herzustellen.

2. Die vorliegende Arbeit hat ferner ergeben, dass auch andere Stoffe unter Umständen bei Löslichkeitsbestimmungen einen Einfluss des Dispersitätsgrades erkennen lassen. Diese bisher nur ausnahmsweise (speziell an sehr wenig löslichen Stoffen) beobachtete Tatsache macht es erforderlich, dass in Zukunft bei der Ermittlung der Löslichkeit, und eventuell anderer physikalisch-chemischer Konstanten auf die Vorgeschichte, welche die Korngrösse wesentlich beeinflussen kann, geachtet werden muss. Wir hoffen darüber später näheres mitteilen zu können.

Der eine von uns (THÖNNESSEN) möchte an dieser Stelle der Dr. C. DUISBERG-Stiftung für das Auslandstudium deutscher Studenten herzlichst danken für die Bewilligung der Mittel, die ihm gestatteten, im VAN 'T HOFF-Laboratorium zu arbeiten.

Utrecht, im April 1932.

VAN 'T HOFF-Laboratorium.

1) J. Am. Chem. Soc. **49**, 935, 1940 (1927).

2) Z. physik. Chem. **124**, 225 (1926); **130**, COHEN-Festband, 187 (1927); **132**, 185 (1928).

3) Z. Anorg. Allgem. Chem. **205**, 127 (1932).

Physics. — *The dependence of the susceptibility of bismuth single-crystals upon the field.* By W. J. DE HAAS and P. M. VAN ALPHEN. (Comm. N^o. 220d from the KAMERLINGH ONNES laboratory Leyden).

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

§ 1. In a previous paper¹⁾ we described our investigations on the magnetization of pure bismuth single-crystals. We found the interesting fact, that at the temperature of liquid hydrogen this magnetization no longer increases linearly with the field. We found two regions situated at about 7 and 14 KG in which it decreases with increasing intensity of the field. It seemed interesting to repeat the measurements in order to see in how far they are reproducible and to extend them to higher magnetic fields. Of special interest it would be to find out whether a third region with decreasing magnetization exists and if so, whether a relation could be traced between these three regions.

The new large electro-magnet offered us the opportunity to extend the measurements (made before up to ± 20 KG) to ± 35 KG. With this magnet the low fields could not be well reached, as for a current of 10 Amp. (the minimum that could be realised with the provisional arrangement of the magnet) the intensity of the field at the maximum of $H \frac{\partial H}{\partial x}$ was 8.6 KG already.

§ 2. *Apparatus and material investigated.*

The apparatus used has been described already in the former paper. For the use in high magnetic field the dimensions of the lower end were still reduced.

To the lower end of the copper tube a thinwalled glass tube of 7 mm diameter is sealed by means of a platinum ring. In this tube the crystal (5 mm) is suspended in such a way that it can be moved up and down. The tube is surrounded by the cryostat with liquid hydrogen and the whole is placed between the poles of the magnet (polar distance 10.5 mm).

With a cathetometer we can easily determine the place of the crystal in the field. By screwing the latter up or down it can be placed at the maximum of $H \frac{dH}{dx}$. This maximum was determined by calibration with a small coil and a ballistic galvanometer. Because of the pointed form of the pole-shoes and their small distance the region, where $H \frac{dH}{dx}$ is constant, is

¹⁾ These Proceedings, XXXIII, 1932, 1106.

very small. By the large diameter of the calibration coil (4 mm) the accuracy of the determination of $\frac{dH}{dx}$ is therefore not great. If the diameter were made smaller, the surface of the windings would become too small.

The crystal had disk form; the height was 1.3 mm and the diameter 5 mm. It was made from ten times recrystallized chemically purified bismuth. The principal axis was parallel with the cylinder axis and perpendicular to the lines of force.

The crystal was suspended by a gold wire 0.1 mm thick fixed to a piece of ivory which was glued to a long quartz tube. The whole was suspended to the balance, by means of which we measured the force exerted by the magnetic field.

After the experiments the crystal was taken away and at the different temperatures the correction for the empty quartz carrier was measured. This correction proved to change hardly with the temperature.

Originally the measurements were made with a glass carrier. By the cooling down however this became paramagnetic and its susceptibility was strongly dependent on the temperature. For this reason the measurements were repeated with a carrier of clear quartz.

The results are in good agreement.

§ 3. *Results.*

At room temperature the magnetisation is found to increase linearly with the intensity of the field, as might be expected. For a direction perpendicular to the principal axis we find $\chi = 1.40 \cdot 10^{-6}$. By the inaccuracy in the value of $\frac{dH}{dx}$ probably this value is lower than that found previously viz. $1.48 \cdot 10^{-6}$.

Rotation of the magnetic field round the direction of the principal axis has no influence on this value.

At the hydrogen temperatures $20^{\circ}.4$ K and $14^{\circ}.2$ K the results are again different. When the field was perpendicular to a binary axis we found a decrease of the diamagnetic magnetisation at 12.5 KG. For higher fields the magnetisation changes nearly linearly. Between 21 and 28 KG however the magnetisation changes a little bit more slowly.

In case the field is parallel with a binary axis we find as the first time a curve in the magnetisation at 14.5 KG. For higher fields it increases linearly.

Summarizing: we find, that in the direction of the three binary axes the susceptibilities are equal. For an intermediate direction however we find another value. According to the theory of THOMSON for para- and diamagnetic crystals ¹⁾ the values of the susceptibility for all directions

¹⁾ W. THOMSON, Phil. Mag. (4) I, 177, 1851.

perpendicular to the principal axis should be the same. One of the fundamental assumptions of this theory is, that the magnetisation is a

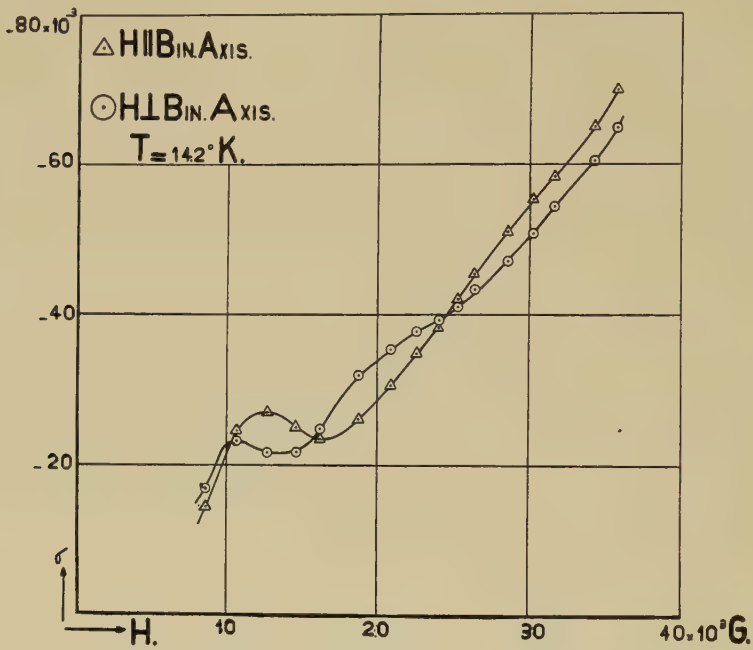


Fig. 1.

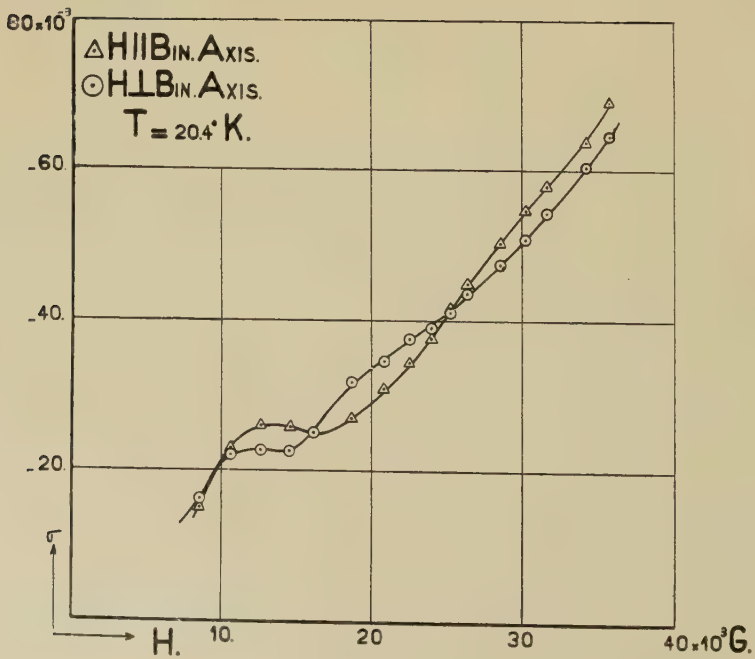


Fig. 2.

TABLE I.

$H \times 10^3 \text{ G}$	$T = 20.4^\circ \text{ K}$ $- \sigma \times 10^3$		$T = 14.2^\circ \text{ K}$ $- \sigma \times 10^3$	
	$H // \text{ Bin Axis}$	$H \perp \text{ Bin Axis}$	$H // \text{ Bin Axis}$	$H \perp \text{ Bin Axis}$
8.6	15.0	16.1	14.4	16.8
10.6 ⁵	22.9	22.0	24.5	23.2
12.7	25.9	22.6	26.9	21.6
14.6	25.5	22.5	24.9	21.6
16.2	24.8	25.0	23.4	24.8
18.7 ⁵	26.8	31.7	26.0	31.9
20.9	30.8	34.5	30.5	35.3
22.6	34.3	37.5	34.7	37.7
24.0 ⁵	37.5	38.9	38.2	39.2
25.3	41.7	41.1	42.0	41.1
26.4	44.8	43.7	45.4	43.4
28.6	50.3	47.5	51.0	47.1
30.2 ⁵	54.6	50.9	55.3	50.8
31.6 ⁵	57.9	54.3	58.4	54.2
34.2 ⁵	63.7	60.6	65.0	60.4
35.7 ⁵	69.1	64.5	69.9	64.9

linear function of the field. This is here no longer the case, so that the general theory does not hold here. The problem is analogous to that of the ferromagnetic crystals. As a rule the magnetisation will not coincide with the direction of the field. What we measured was the component of the magnetisation in the direction of the lines of force. It is therefore very well possible that only in one direction a deviation from linearity occurs, though in both directions measured an effect is observed.

Interesting is that the ratio of the values of the field intensities for which the decrease of the susceptibilities has been found in the two cases ($H // \text{ bin. axis}$ and $H \perp \text{ bin. axis}$) is about equal to $\cos 30^\circ$. It may therefore be that it are only the directions perpendicular to the binary axes that show an irregularity.

In case the field is parallel with the principal axis no irregularity has been found.

In order to investigate this the crystal was replaced by another one in

which the principal axis was lying in the plane surface. The magnet was turned thus that the lines of force were parallel with this principal axis. Our former measurements with the smaller magnet gave for the susceptibility at room temperature $\chi = -1.04 \cdot 10^{-6}$, which was in good agreement with the value found by FOCKE $\chi = -1.046 \cdot 10^{-6}$ ¹⁾, and less than that found by MAC LENNAN $\chi = 1.16$ ²⁾.

With the large magnet we found now $\chi = -1.01 \cdot 10^{-6}$. By the inaccuracy in $\frac{dH}{dx}$ mentioned above this value is probably too low.

Also at the temperatures $20^\circ.4$ and $14^\circ.2$ the magnetisation of pure bismuth single-crystal in the direction of the principal axis shows a normal behaviour viz. it increases linearly with the field.

For the values of the susceptibility we find both at $20^\circ.4$ and at $14^\circ.0$ $\chi = -1.17 \cdot 10^{-6}$. By the same reason as above this too is probably somewhat too small. Evidently also in this direction the diamagnetic susceptibility increases still considerably when the temperature is lowered.

Finally we wish to express our thanks to Mr. J. W. BLOM for the preparation of the pure bismuth-crystals and Mr. O. GUINEAU for his help during the measurements.

¹⁾ A. FOCKE, Phys. Rev. **36**, 319.

²⁾ J. C. MAC LENNAN and E. COHEN, Trans. Roy. Soc. Canada **23**, 159.

Mathematics. — Über projektive Differentialinvarianten VI.

VON R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Wir skizzieren in dieser Mitteilung kurz das algebraische Fundament für die Theorie der projektiven Differentialinvarianten einer X_m im projektiven R_n mit $1 < m < n-1$, d.h. einer topologischen m -dimensionalen Mannigfaltigkeit im n -dimensionalen projektiven Raume.

Die X_m ist gegeben durch ihre Parametergleichungen

$$y^i = y^i(t^1, t^2, \dots, t^m) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Wir sprechen wieder von der „Reihe“ y ; analog soll die Reihe y_α die $n+1$ Funktionen $\frac{\partial y^1}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial y^2}{\partial t^\alpha}, \dots, \frac{\partial y^{n+1}}{\partial t^\alpha}$ andeuten und ebenso bei höheren Ableitungen $y_{\alpha\beta\gamma\dots}$. Die Parameter t^i werden topologisch transformiert (Gruppe P , Multiplikator $\Delta = \left| \frac{\partial t^\alpha}{\partial t^\beta} \right|$); die y^i werden linear-homogen (all-

gemeine projektive Gruppe G) und ausserdem wie $\hat{y}^i = \lambda y^i$ (Gruppe H) transformiert, wo λ eine willkürliche Funktion der t^α ist.

Das Hauptproblem ist dann die Ermittlung eines *wesentlichen Reduktionssystems*, d.h. einer Reihe von projektiven Tensoren des Parameter-raumes mit der Eigenschaft, dass alle weiteren projektiven Differential-invarianten der X_m Differentialinvarianten dieser Tensoren sind. („Methode der simultanen Differentialformen“).

Die genannten Tensoren werden hier erhalten aus projektiven Tensor-dichten T und zu diesen führt der folgende Weg ¹⁾.

Durch die beiden Zahlen m und n werden zwei weitere natürliche Zahlen k und j bestimmt, die für die Konstruktion dieser Tensordichten T grundlegend sind. Setzen wir nämlich

$$m_1 = m, m_2 = \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}, m_3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots \quad (1)$$

dann wird wegen $m < n - 1$ durch die Ungleichungen

$$s_k = 1 + m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq n + 1 < 1 + m_1 + \dots + m_k + m_{k+1} = s_{k+1} \quad (2)$$

eine Zahl $k \geq 2$ festgelegt und für

$$j = n + 1 - s_{k-1}. \quad (3)$$

gilt dann $0 < j \leq m_k$.

Diese Zahlen k und j stellen sich ein, wenn man den $(n+1)$ -reihigen Klammerfaktor ausfüllt mit den Reihen $y, y_\alpha, y_{\alpha\beta}, \dots$. Es entsteht dann der Klammerfaktor

$$F_{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} = (y y_1 \dots y_n y_{11} \dots y_{mm} \dots y_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \dots y_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}). \quad (4)$$

Beispiele ²⁾:

- 1). $m = 2, n = 4: F = (y y_1 y_2 y_{\alpha_1 \alpha_2} y_{\beta_1 \beta_2}),$ also $k = 2, j = 2.$
- 2). $m = 2, n = 5: F = (y y_1 y_2 y_{11} y_{12} y_{22}),$ also $k = 2, j = 3.$
- 3). $m = 2, n = 6: F = (y y_1 y_2 y_{11} y_{12} y_{22} y_{ikl}),$ also $k = 3, j = 1.$

Die Determinante F liefert bereits eine der oben genannten Tensor-dichten. Wählen wir nämlich der Reihenanzahl j entsprechend j ver-

¹⁾ Ich nenne ein System von Funktionen wie z. B. $a_{ikl, \dots}$ eine *projektive Tensordichte vom Δ -Gewichte q und von λ -Gewichte p* , wenn bei den Transformationen von G, P bzw. H die Gleichungen gelten;

$$\bar{a}_{ikl, \dots} = c \cdot a_{ikl, \dots} \quad (c = \text{const.}) \quad (G)$$

$$\bar{a}_{ik, \dots} = \Delta^q \cdot a_{rs, \dots} \cdot \frac{\partial t^r}{\partial t^i} \frac{\partial t^s}{\partial t^k} \dots \quad (P)$$

$$\hat{a}_{ikl, \dots} = \lambda^p \cdot a_{ikl, \dots} \quad (H)$$

²⁾ Betreffs Einzeluntersuchungen vgl. Nr. 12 des Enzykl. Artikels III D 11 von L. BERWALD.

schiedene Arten von Differentialen $dt, \dots, \delta t$, so entspricht (4) die Differentialform

$$F = (y y_1 \dots y_m \dots y_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \dots y_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}) dt^{\alpha_1} \dots dt^{\alpha_k} \dots \delta t^{\varepsilon_1} \dots \delta t^{\varepsilon_k}. \quad (5)$$

Sie hat das λ -Gewicht

$$1 + m_1 + m_2 + \dots m_{k-1} + j = n + 1$$

und das Δ -Gewicht

$$1 + (m+1) + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+k-2)}{1 \cdot 2 \dots (k-2)}.$$

Sie kann auch dargestellt werden durch

$$F = (y y_1 \dots y_m \dots d^k y \dots \delta^k y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und ihre Koeffizienten $F_{\alpha_1 \dots \alpha_k, \dots, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$ sind in den Indices $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ in den $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ symmetrisch, in diesen Indexgruppen hingegen alternierend, d. h. die Vertauschung zweier dieser Gruppen kehrt das Zeichen um.

Diese m -äre Tensordichte F kann als Ausgangspunkt für den weiteren Aufbau von Differentialinvarianten dienen. Es ist leicht zu sehen, dass aus F nur dann eine Differentialform k -ter Ordnung mit nur einer Gattung von Differentialen wird, wenn entweder $j=1$ oder $j=m_k-1$ ist. Einen Grenzfall bildet $j=m_k$, wenn also $s_k=n+1$ ist. Dann hat man keine Differentialform, sondern eine relative Invariante F .

Zur Verdeutlichung ein einfaches Beispiel. Sei $m=2$, $n=4$; dann haben wir

$$F = (y y_1 y_2 y_{ik} y_{rs}) dt^i dt^k \delta t^r \delta t^s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dies ist eine binäre Differentialform mit zwei Reihen Differenzialen: quadratisch in jeder Reihe und alternierend bzgl. der Reihenpaare. Sie kann in eine GORDAN-CAPELLI'sche Reihe nach Potenzen von

$$(dt \delta t) = \begin{vmatrix} dt^1 & dt^2 \\ \delta t^1 & \delta t^2 \end{vmatrix}$$

entwickelt werden:

$$F = F_0 + (dt \delta t) \cdot F_1 + (dt \delta t)^2 \cdot F_2.$$

Wegen des Alternierens der Reihenpaare sind hier F_0 und F_2 identisch Null und F_1 ist die Polare der quadratischen Differentialform von KOMMERELL ¹⁾

$$F_1 = (y y_1 y_2 y_{11} y_{12}) (dt^1)^2 + 2(y y_1 y_2 y_{11} y_{22}) dt^1 dt^2 + (y y_1 y_2 y_{12} y_{22}) (dt^2)^2 \quad \left. \vphantom{F_1} \right\} (8) \\ = (y y_1 y_2 dy_1 dy_2)$$

Im allgemeinen Falle ist die Form F von (6) die letzte einer Reihe

¹⁾ K. KOMMERELL, Dissertation Tübingen (1897) und Mathem. Ann. 60 (1905); G. FUBINI-E. ČECH, Geometria proiettiva differenziale II, p. 629 ff, Bologna (1927); A. KAWAGUCHI, Japanese Journ. of Mathem. IV (1927), p. 275-305.

Mathematics. — Über projektive Differentialinvarianten VII.

VON R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Ich habe in der 4. und 5. dieser Mitteilungen¹⁾ das Problem der Ermittlung aller projektiven Diff. Inv. J. einer $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_{n-1} in einem n -dimensionalen projektiven Raume R_n behandelt und die sich hier einstellenden Tensoren des wesentlichen Reduktionssystems ermittelt. Es sind dies bei $n=3$ zwei quadratische und eine kubische binäre Differentialform; bei $n>3$ nur eine quadratische und eine kubische $(n-1)$ -äre Differentialform²⁾.

Das genannte Problem bildet einen speziellen Fall des allgemeineren: Ermittlung der projektiven Diff. Inv. einer X_m im R_n , dessen algebraische Grundlagen ich in der 6. Mitteilung skizziert habe³⁾. Der Fall $m=1$ (Kurven im R_n) und der oben genannte Fall $m=n-1$ (Hyperflächen im R_n) sind ausführlich behandelt.

Bisher unbeachtet blieb der Fall $m=n$, wo also ein n -dimensionaler topologischer X_n auf einen projektiven R_n abgebildet erscheint, d.h. X_n ist gegeben durch die $n+1$ Parametergleichungen

$$y^i = y^i(t^1, t^2, \dots, t^n) \quad (i=1, 2, \dots, n+1); \dots \quad (1)$$

hier bedeuten die linksstehenden y^i homogene Punktkoordinaten des R_n , die rechtsstehenden y^i sind Funktionszeichen für genügend-oft stetig-differentierbare Funktionen der n komplexen Parameter t^1, t^2, \dots, t^n .

Wir wollen zeigen, dass dieser Fall $m=n$ in ungezwungener und ganz natürlicher Weise das Band aufdeckt, das die übliche projektive Differentialgeometrie (HALPHÉN, WILCZYNSKI, FUBINI, ČECH) und die in den letzten Jahren entwickelte Theorie des „projektiven Zusammenhanges“ (WEYL, EISENHART, VEULEN, THOMAS, CARTAN, SCHOUTEN u.a.)⁴⁾ verbindet.

Unser Problem kann wie folgt formuliert werden. Neben den $n+1$ Gleichungen (1) sind drei Gruppen gegeben.

¹⁾ Diese Proc. 28 (1925).

²⁾ Für $n=3$ vgl. E. J. WILCZYNSKI, Trans. Amer. Mathem. Soc. 8 (1907), p. 233; ebenda, 9 (1908), p. 79 und 10 (1909), p. 176; für $n \geq 3$; G. FUBINI, Rendic. di Palermo 43 (1918), p. 1 und G. FUBINI-E. ČECH, Geometria proiettiva differenziale I, II, Bologna (1927), Vgl. auch das Enzyklopädie-Referat III D 11 von L. BERWALD, Nr. 10 bis 12.

³⁾ Diese Proc. 35 (1932).

⁴⁾ Vgl. L. P. EISENHART, Non-Riemannian Geometry, New York, Amer. Mathem. Soc. (1927); weitere Literatur bei E. BORTOLOTTI, Bolletino dell' Unione Mat. Italiana 10 (1930), p. 1-23 und Rendic. di Palermo 56 (1931), p. 1-57.

1. Die Gruppe P aller topologischen Abbildungen

$$t^i = t^i(\bar{t}^1, \bar{t}^2, \dots, \bar{t}^n)$$

des n -dimensionalen Parameterraumes.

2. Die allgemeine lineare Gruppe G der $n+1$ homogenen Veränderlichen y^i :

$$\tilde{y}^i = g_1^i y^1 + g_2^i y^2 + \dots + g_{n+1}^i y^{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

mit konstanten g_k^i und $|g_k^i| \neq 0$.

3. Die Gruppe H der Transformationen

$$\hat{y}^i = \lambda(t^1, t^2, \dots, t^n) \cdot y^i \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

wo λ eine genügend oft stetig-differenzierbare Funktion der n Parameter t^i ist.

Gesucht sind dann alle projektiven Differential-invarianten J der X_n , d. h. diejenigen Funktionen der y^i , $\frac{\partial y^i}{\partial t^\alpha}$, $\frac{\partial^2 y^i}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}$, ..., die bei den Gruppen P, G und H die Invarianteneigenschaft besitzen. Wir werden zeigen, dass es für $n \geq 2$ ausser der mit D bezeichneten Invariante keine weiteren gibt. Bei $n=1$ hingegen stellt sich noch eine Invariante dritter Ordnung ein, die, mit inhomogenen Koordinaten geschrieben, mit der SCHWARZ'schen Differentialinvariante identisch ist.

§ 1.

Am einfachsten ist die Gruppe G zu erledigen. J ist eine projektive Invariante der „Punkte“ y , $y_\alpha = \frac{\partial y}{\partial t^\alpha}$, $y_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}$, ... und daher eine Funktion der $(n+1)$ -reihigen Determinanten (Klammerfaktoren) der Gestalt $(yy_\alpha y_\beta y_{\alpha\beta} \dots y_{(s)})$. Die einfachsten dieser Determinanten sind:

$$D = (y y_1 y_2 \dots y_n) \dots \dots \dots (1)$$

$$\alpha_{ik} = (y_1 y_2 \dots y_n y_{ik}) \dots \dots \dots (2)$$

$$\varphi_{ik}^h = (-1)^{n+1} (y_1 \dots y_n y_{ik}) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial t^1} & \frac{\partial y^2}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial y^{n+1}}{\partial t^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial t^2} & \frac{\partial y^2}{\partial t^2} & \dots & \frac{\partial y^{n+1}}{\partial t^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^1 & y^2 & \dots & y^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 y^1}{\partial t^i \partial t^k} & \frac{\partial^2 y^2}{\partial t^i \partial t^k} & \dots & \frac{\partial^2 y^{n+1}}{\partial t^i \partial t^k} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

(die Reihe y bildet die h -te Zeile!)

D ist bereits eine projektive Tensordichte vom Δ -Gewichte 1 und vom λ -Gewichte $n+1$; wir haben nämlich bei P mit $\Delta = \left| \frac{\partial t^i}{\partial t^k} \right| \neq 0$ wegen

$$\bar{y} = y, \quad \bar{y}_i = y_r \frac{\partial t^r}{\partial t^i}, \quad \bar{y}_{ik} = y_{rs} \frac{r}{i} \frac{s}{k} + y_r \frac{\partial^2 r}{\partial t^i \partial t^k} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\bar{D} = \Delta \cdot D. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und bei H wegen

$$\left. \begin{aligned} \hat{y} &= \lambda y, \quad \hat{y}_i = \lambda y_i + \lambda_i y, \quad \hat{y}_{ik} = \lambda y_{ik} + \lambda_i y_k + \lambda_k y_i + \lambda_{ik} y \\ \lambda_i &= \frac{\partial \lambda}{\partial t^i}, \quad \lambda_{ik} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^i \partial t^k} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\hat{D} = \lambda^{n+1} \cdot D.$$

Man zeigt weiters, — vgl. den § 1 der 4. Mitteilung — dass mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} (y y_1 \dots y_n) \cdot y_\nu &= (y_\nu y_1 \dots y_n) \cdot y - \\ &\quad - (y_\nu y y_2 \dots y_n) \cdot y_1 + \dots \pm (y_\nu y y_1 \dots y_{n-1}) \cdot y_n \\ (y_{i_1} \dots y_{i_n} y_\nu) &= \frac{\partial (y_{i_1} \dots y_{i_n} y_{\nu-1})}{\partial t} - (y_{i_1+1} y_{i_2} \dots y_\nu) - \dots - (y_{i_1} \dots y_{i_n} y_\nu) \quad . \quad (8) \end{aligned}$$

(ν und i_s bedeuten Ziffernkomplexe)

alle Klammerfaktoren $(y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_{n+1}})$ rational durch D , a_{ik} und φ_{ik}^h und deren Ableitungen auszudrücken sind, wobei im Nenner nur Potenzen von D auftreten. Hierbei ist $D \neq 0$ vorausgesetzt; $D \equiv 0$ würde einen nur $(n-1)$ -dimensionalen Parameterraum bedeuten.

Wir führen jetzt statt a_{ik} und φ_{ik}^h die Funktionen ein

$$a_{ik} = \frac{1}{D} a_{ik} \quad \psi_{ik}^h = \frac{1}{D} \varphi_{ik}^h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

a_{ik} ist dann bereits ein Tensor des Parameterraumes X_n :

$$\bar{a}_{ik} = a_{rs} \frac{r}{i} \frac{s}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

hingegen noch kein projektiver Tensor; denn bei der Gruppe H findet man

$$\hat{a}_{ik} = a_{ik} + (-1)^{n+1} \psi_{ik}^h \cdot \frac{\lambda_h}{\lambda} + (-1)^n \left[\frac{\lambda_{ik}}{\lambda} - 2 \frac{\lambda_i \lambda_k}{\lambda^2} \right] \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Funktionen ψ_{ik}^h sind keine Tensorkomponenten; wir haben:

$$\bar{\psi}_{ik}^h = \psi_{rs}^v \frac{r}{i} \frac{s}{k} \frac{\bar{h}}{v} + \frac{\partial^2 v}{i k} \frac{\bar{h}}{v} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (12)$$

$$\hat{\psi}_{ik}^h = \psi_{ik}^h + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \delta_k^h + \frac{\lambda_k}{\lambda} \delta_i^h \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

Aus (7) folgt noch

$$\frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\partial \lg D}{\partial t^i} - \frac{\partial \lg D}{\partial t^i} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (14)$$

Schliesslich führen wir im Verbande mit (8) noch an, dass die aus (8) folgende Reduktion direkt aus einer Identität abgelesen werden kann, die sich durch Umformung von D . $y_{ik} = (y y_1 y_2 \dots y_n) \cdot y_{ik}$ ergibt:

$$y_{ik} = (-1)^n [a_{ik} \cdot y - (-1)^{n+1} \psi_{ik}^h y_h] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (15)$$

§ 2.

Durch die Aufzählung von D , a_{ik} und ψ_{ik}^h ist die allgemeine projektive Gruppe G erledigt, was die Aufstellung eines wesentlichen Reduktionssystems für alle Invarianten J betrifft.

Beim zweiten Schritte wollen wir die Gruppe H ausschalten. Hierzu haben wir aus den Gleichungen (14), (13) und (11) die Funktionen $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ und

$\frac{\lambda_{ik}}{\lambda}$ zu eliminieren. Bei (13) und (14) ergibt dies $\hat{\pi}_{ik}^h = \pi_{ik}^h$ mit

$$\pi_{ik}^h = \psi_{ik}^h - \frac{1}{n+1} \left(\delta_k^h \frac{\partial \lg D}{\partial t^i} + \delta_i^h \frac{\partial \lg D}{\partial t^k} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (16)$$

Diese Funktionen sind bei H absolut-invariant. Aus (12) lesen wir ab, dass sich bei der Gruppe P die ψ_{ik}^h so transformieren wie die *Komponenten eines affinen Zusammenhanges* und (16) zeigt, dass die π_{ik}^h als *Koeffizienten eines projektiven Zusammenhanges*¹⁾ (spezieller Art) aufgefasst werden können.

Wegen

$$\psi_i = \psi_{ih}^h = \frac{\partial \lg D}{\partial t^i}$$

folgt aus (16) $\pi_i = \pi_{ih}^h = 0$.

Die Funktionen π_{ik}^h bilden keinen Tensor, bei der Gruppe P ergibt sich nämlich:

$$\bar{\pi}_{ik}^h \cdot \frac{v}{h} = \pi_{rs}^v \frac{r}{i} \frac{s}{k} \frac{\bar{h}}{v} + \frac{\partial^2 v}{i k} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{\partial \lg \Delta}{i} \frac{v}{k} + \frac{\partial \lg \Delta}{k} \frac{v}{i} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (17)$$

wobei $\Delta = \left| \frac{\partial t^i}{\partial t^k} \right|$ ist.

¹⁾ Nach L. P. EISENHART, Non-Riemannian Geometry, p. 98.

Weiters haben wir aus (11) und (14) die $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ und $\frac{\lambda_{ik}}{\lambda}$ zu eliminieren, wobei zuerst (14) nochmals nach t zu differenzieren ist. Drückt man dann noch die ψ_{ik}^h von (11) vermöge (16) durch die π_{ik}^h aus, so ergibt sich $b_{ik} = \hat{b}_{ik}$ mit

$$b_{ik} = a_{ik} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \pi_{ik}^h \frac{\partial \lg D}{h} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \frac{\partial^2 \lg D}{i k} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \frac{\partial \lg D}{i} \frac{\partial \lg D}{k}. \quad (18)$$

Diese b_{ik} sind bei H absolut-invariant; sie bilden jedoch keinen Tensor. Wir finden nämlich:

$$\bar{b}_{ik} = \left(b_{rs} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \pi_{rs}^h \frac{\partial \lg \Delta}{v} \right) \frac{r}{i} \frac{s}{k} + \left. \begin{aligned} & + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\frac{\partial^2 \lg \Delta}{i k} - \frac{\partial \lg \Delta}{m} \frac{\partial^2 m}{i k} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial \lg \Delta}{i} \frac{\partial \lg \Delta}{k} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

§ 3.

Mit der Aufzählung von D , π_{ik}^h und b_{ik} ist auch die Gruppe H erledigt. Der letzte Schritt zur Ermittlung eines wesentlichen Reduktionssystems erfordert die Ausschaltung der Gruppe P , d. h. die Elimination der Ableitungen $\frac{\partial^2 t^r}{\partial t^i \partial t^k}$ und $\frac{\partial^3 t^r}{i k l}$ aus den Gleichungen (17) und (19) (= Transformationsgleichungen für die π_{ik}^h resp. b_{ik}), wozu noch die aus $\bar{D} = \Delta \cdot D$ durch Ableiten entstehenden Gleichungen kommen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lg \bar{D}}{i} &= \frac{\partial \lg D}{r} \frac{r}{i} + \frac{\partial \lg \Delta}{i} \\ \frac{\partial^2 \lg \bar{D}}{i k} &= \frac{\partial^2 \lg D}{r s} \frac{r}{i} \frac{s}{k} + \frac{\partial \lg D}{v} \frac{\partial^2 v}{i k} + \frac{\partial^2 \lg \Delta}{i k} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (20)$$

Die Elimination der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 r}{i k}$ aus (17) allein ist nicht möglich; es sind dies $\frac{1}{2} n^2 (n+1)$ lineare Gleichungen in ebensovielen Unbekannten $\frac{\partial^2 r}{i k}$. Auch die Berechnung dieser letzteren ist nicht möglich, da wegen $\pi_i = \pi_{ih}^h \equiv 0$ diese Gleichungen (17) nicht linear-unabhängig sind. Nimmt man $(20)_1$ zu Hilfe, so gelangt man auf (12) zurück. Man muss also mit der Elimination der dritten Ableitungen $\frac{\partial^3 r}{i j k}$ beginnen. Dies tut man am besten bei (17) indem man nach \bar{t}^j differenziert und dann k mit j vertauscht.

Man erhält so den *Weyl'schen projektiven Krümmungstensor*¹⁾.

$$W_{i,jk}^h = \Pi_{i,jk}^h + \frac{1}{n-1} (\delta_j^h \Pi_{ik} - \delta_k^h \Pi_{ij}) \quad (n > 1) \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Hierbei ist

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{i,jk}^h &= \frac{\partial \pi_{ik}^h}{\partial t^j} - \frac{\partial \pi_{ij}^h}{\partial t^k} + \pi_{ik}^r \pi_{rj}^h - \pi_{ij}^r \pi_{rk}^h \\ \Pi_{ij} &= \Pi_{ji} = \Pi_{ij}^h = \pi_{si}^r \pi_{rj}^s - \frac{\partial \pi_{ij}^r}{\partial t^r} \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

und π_{ik}^h ist durch (16) gegeben.

Für die Π_{ij} von (22)₂ erhalten wir bei P die Transformationsgleichungen

$$\bar{\Pi}_{ik} - \frac{n-1}{n+1} \frac{\pi_{ik}}{\pi_{ik}} \frac{\partial \lg \Delta}{h} = \Pi_{rs} \frac{r}{i} \frac{s}{k} + \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} \frac{\partial \lg \Delta}{i} \frac{\partial \lg \Delta}{k} - \frac{\partial^2 \lg \Delta}{i k} \right) \quad (23)$$

Wenn man dies mit (19) kombiniert, so ergibt sich

$$b_{ik} = \frac{(-1)^n}{n-1} \Pi_{ik} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Hiermit sind die b_{ik} ausgeschaltet und alles ist auf die π_{ik}^h und deren Transformationsgleichungen zurückgebracht. Man rechnet nun leicht nach, dass erstens der *Weyl'sche Tensor* W_{ijk}^h identisch verschwindet, dass also für $n > 2$ die X_n projektiv-eben ist, was ja von Haus aus zu erwarten war. Setzen wir nämlich:

$$y^i = t^i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad y^{n+1} = f(t^1, t^2, \dots, t^n), \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

dann ist mit $f_r = \frac{\partial f}{\partial t^r}$:

$$\left. \begin{aligned} D &= (-1)^{n+1} (t^r f_r - f) = (-1)^{n+1} \cdot g \\ a_{ik} &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{f_{ik}}{g} \quad , \quad g_i = t^r f_{ri} \\ \psi_{ik}^h &= \frac{t^h f_{ik}}{g} \\ \pi_{ik}^h &= \frac{1}{g} \left[t^h f_{ik} - \frac{1}{n+1} (g_i \delta_k^h + g_k \delta_i^h) \right] \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad (26)$$

Mit diesen Ausdrücken findet man $W_{ijk}^h \equiv 0$, wobei man die Rechnung noch durch die Normierung $D = \text{const}$, bedeutend vereinfachen kann.

Mit Hilfe von (26) ergibt sich für die Π_{ij} von (22)₂:

$$\Pi_{ij} = \frac{n(n-1) g_i g_j}{(n+1)^2 g^2} + \frac{n-1}{n+1} \frac{f_{ij} g_s t^s}{g^2} - \frac{n-1}{n+1} \frac{g_{ij}}{g} - (n-1) \frac{f_{ij}}{g} . \quad (27)$$

¹⁾ H. WEYL, Göttinger Nachr. (28, 1, 1921); vgl. auch EISENHART, l. c. p. 99.

Berechnet man hiermit die „projective covariant“ von THOMAS ¹⁾

$$\Pi_{i,jk} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial t^k} - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial t^j} + \pi_{ij}^h \Pi_{hk} - \pi_{ik}^h \Pi_{hj}, \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

so findet man, dass auch diese verschwindet. Hieraus folgt zweitens, dass auch für $n=2$ (wo der Weyl'sche Tensor stets Null ist) unsere X_2 projektiv-eben ist und überdies ²⁾ dass keine weiteren Differential invarianten existieren.

In dem bisher ausgeschlossenen Falle $n=1$ haben wir

$$y^i = y^i(t) \quad \text{mit} \quad i=1, 2 \quad \text{und} \quad D = (yy_1) = (yy') = D_{01}, \quad . \quad (29)$$

wobei das Differenzieren nach t jetzt durch Striche angedeutet wird.

Statt a_{ik} und φ_{ik}^h haben wir die Determinanten

$$D_{12} = (y'y''), \quad D_{02} = (yy'')$$

und statt a_{ik} bzw. ψ_{ik}^h kommen

$$a = \frac{D_{12}}{D_{01}} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{D_{02}}{D_{01}}$$

mit (vgl. (11) und (13))

$$\hat{a} = a + \psi \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda''}{\lambda} + 2 \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2, \quad \hat{\psi} = \psi + 2 \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Hier führt die Elimination von λ, λ' und λ'' zur einzigen Invariante

$$J = \left(\frac{D_{02}}{D_{01}} \right)' + 2 \frac{D_{12}}{D_{01}} - \frac{1}{2} \left(\frac{D_{02}}{D_{01}} \right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Gehen wir bei (29) zu inhomogenen Koordinaten über und setzen $\frac{y^2}{y^1} = u$ oder

$$y^1 = t, \quad y^2 = u \cdot t,$$

so entsteht aus (30):

$$J = \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2} \left(\frac{u''}{u'} \right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

d. i. der sogen. „SCHWARZ'sche Differentialausdruck“. Bekanntlich gibt $J=0$:

$$u = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} = \frac{y^2}{y^1},$$

d. h. X_1 ist eine Gerade.

¹⁾ O. VEULEN u. J. M. THOMAS, Annals of Math. 27 (1926), p. 279-296.

²⁾ J. M. THOMAS, l. c. p. 293.

Mathematics. — Die Zerlegung von G_{2m-2} -Komplexen im G_{2m} . Von R. WEITZENBÖCK und G. H. A. GROSHEIDE F.WZN.

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Im G_n (linearer, projectiver, $(n-1)$ -dim. Raum) ist eine Gerade mit den Linienkoordinaten a_{ik} durch $K_a = \sum a_{ik} \pi'_{ik} = \frac{1}{2} (a\pi')^2 = 0$ dargestellt, wobei die π_{ik} die homogenen Raumkoord. eines veränderlichen G_{n-2} sind. Man sagt auch: $K=0$ ist ein *spezieller* linearer G_{n-2} -Komplex des G_n . Sind die $a_{ik} = -a_{ki}$ nicht Linienkoordinaten, sondern $\frac{1}{2} n(n-1)$ unabhängige Koeff., so gibt $K = (a\pi')^2 = 0$ einen *allgemeinen* G_{n-2} -Komplex des G_n .

Es ist bekannt ¹⁾, dass sich K als Summe von $\nu \leq \left[\frac{n}{2} \right]$ speziellen Komplexen in der Gestalt.

$$K = c_a K_a + c_b K_b + \dots + c_q K_q$$

darstellen lässt, wo $a_{ik}, b_{ik}, \dots, q_{ik}$ ν Geraden sind. Wir geben im Nachstehenden diese Darstellung in expliziter Form. ²⁾

§ 1.

Man kann sich auf gerades $n = 2m$ beschränken. Wir gehen dann aus von einem allgemeinen G_{2m-2} -Komplex.

$$K = (a\pi')^2 = 0, \dots \dots \dots (1)$$

setzen also voraus, dass seine (einzige) projektive Inv. $(a_1^2 \dots a_m^2) \neq 0$ sei. Einem Punkte y ist durch K der Nullraum $N_y = (xy a_1^2 \dots a_{m-1}^2) = 0$ zugeordnet, einem zweiten Punkte z ebenso $N_z = 0$. Der Verbindungs-
linie p_{ik} von y und z kann dann das Schnittgebiet P_{2m-2n} von N_y und N_z zugeordnet werden. Seine Gleichung lautet

$$(\pi p a_1^2 \dots a_{m-1}^2) (\pi p a_m^2 \dots a_{2m-2}^2) = 0. \dots \dots \dots (2)$$

Dies verallgemeinern wir: sind $(p_i \pi')^2 = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) die Gleichungen

¹⁾ Für $n = 4$ bei H. GRASSMANN (1844) und mechanisch interpretiert (Kräfte statt Geraden) schon lange vorher. Für $n = 5$ bei D. DE FRANCESCO, Gion. di Mat. **34** (1896), p. 182; für das Gebiet G_n bei: E. LASKER, Proc. London Math. Soc. **28** (1896-1897), p. 217, 500 und W. H. YOUNG, ebenda **29**, p. 478 und **30** (1898-1899) p. 33. Bzgl. der Transformation einer alternierenden Bilinearform in die obiger Zerlegung von K entsprechende Normalform vgl. z. B. P. MUTH, Elementarteiler, Leipzig (1899) p. 151.

²⁾ Sie ist zum Theil in Grassmann'scher Darstellungsweise ausgeführt bei H. ROTHE, Wiener Ber. **121** (1912) p. 1015-1050.

von n Geraden, die zusammen das Gebiet $(P_n \pi')^{2n} = 0$ bestimmen, dann kann man diesem Gebiete G_{2n} das Schnittgebiet P_{2m-2n} der den n Geraden p_i nach (2) zugeordneten n Gebieten P_{2m-2} entsprechen lassen: wir nennen dieses Gebiet P_{2m-2n} den „Nullraum“ des G_{2n} . Seine Gleichung ist durch das Produkt von n Ausdrücken (2) oder abgekürzt durch

$$[(\pi P_n a_1^2 \dots a_{m-1}^2)]^{2n} = 0. \quad \dots \quad (3)$$

dargestellt.

§ 2.

Ein linearer G_{2m-2} -Komplex $K = (\alpha \pi')^2 = 0$ besitzt eine Reihe von projektiven Komitanten

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= (\alpha_1^2 \pi^{2m-2}) = K \\ K_2 &= (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \pi^{2m-4}) \\ &\dots \dots \dots \\ K_{m-n} &= (\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n}^2 \pi^{2n}) \\ &\dots \dots \dots \\ K_m &= (\alpha_1^2 \dots \alpha_m^2) = \text{Invariante von } K, \end{aligned} \right\} \dots \dots, \quad (4)$$

durch deren identisches Verschwinden die projektiven Ausartungen zu charakterisieren sind.

Es gilt dann der für das Folgende grundlegende Satz:

Ist $K_{m-n+1} \equiv 0 \{ \pi \}$ aber $K_{m-n} \not\equiv 0 \{ \pi \}$, dann kann K in der Gestalt

$$K = \lambda (p \pi')^2 + (\beta \pi')^2 \dots \dots \dots (5)$$

dargestellt werden, wo p eine Gerade ist und $(\beta \pi')^2 = 0$ einen Komplex darstellt, für den die Komitante K_{m-n} identisch verschwindet.

Beweis: 1) Aus $K_{m-n+1} \equiv 0$ oder $(\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n+1}^2 \pi^{2n-2}) \equiv 0$ folgt, dass jede Komitante mit dem Klammerfaktor $f = (\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n}^2 \alpha_{m-n+1} \pi^{2n-1})$ identisch verschwindet. Dies ergibt sich leicht durch Umformung von $f \cdot (\alpha_{m-n+1} u')$.

2) $(\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n}^2 \pi^{2n}) = (\varphi^{2m-2n} \pi^{2n}) = 0$ stellt ein Gebiet G_{2m-2n} dar. Dies zeigt man direkt indem man das Bestehen der quadratischen p -Relationen für die φ^{2m-2n} nachweist.

3) Setzt man (5) an und verlangt, dass $(\beta_1^2 \dots \beta_{m-n}^2 \pi^{2n}) \equiv 0 \{ \pi \}$ sei, so gibt die spezielle Annahme $\pi^{2n} = y \varrho^{2n-1}$, wo y einen beliebigen Punkt der Geraden p bedeutet, wegen $(\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n-1}^2 p^2 y \varrho^{2n-1}) \equiv 0 \{ \varrho \}$ die Bedingungen $(\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n}^2 y \varrho^{2n-1}) \equiv 0$. Dies besagt, dass y und also die ganze Gerade p im Gebiete G_{2m-2n} mit der Gleichung;

$$(\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n}^2 \pi^{2n}) = 0$$

liegen müssen. Wir können dann die Gerade p als Schnittgebiet dieses G_{2m-2n} mit einem willkürlichen G_{2n+2} (σ^{2n+2}) darstellen:

$$(p \pi')^2 = (\sigma \pi')^2 (\sigma^{2n} \alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n}^2) = 0.$$

Mit diesem p erhält man:

$$B = (\beta_1^2 \dots \beta_{m-n}^2 \pi^{2n}) = (\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n}^2 \pi^{2n}) - \\ - (m-n) \lambda \cdot (\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n-1}^2 \sigma^2 \pi^{2n}) \cdot (\sigma^{2n} \alpha_{m-n}^2 \dots \alpha_{2m-2n-1}^2),$$

woraus sich durch Umformung des letzten Termes ergibt:

$$B = (\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n}^2 \pi^{2n}) \left\{ 1 - \frac{(m-n)}{(2n+1)(n+1)} \lambda (\alpha_{m-n+1}^2 \dots \alpha_{2m-2n-1}^2 \sigma^{2n+2}) \right\}$$

Dies muss $\equiv 0 \{ \pi \}$ sein; also ist

$$\lambda = \frac{(2n+1)(n+1)}{(m-n)} \frac{1}{(\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-n-1}^2 \sigma^{2n+2})} \dots \dots \dots (6)$$

womit obiger Satz in allen Teilen bewiesen ist.

§ 3.

Jetzt gehen wir zurück zu unserem Komplex (1), wählen eine Gerade p_1 mit $(\alpha_1^2 \dots \alpha_{m-1}^2 p_1^2) \neq 0$. Wir haben dann nach (5):

$$K = (a\pi')^2 = \lambda_1 (p_1\pi')^2 + (\alpha_1\pi')^2$$

wobei für den Komplex α_1 die Invariante $(\alpha_1^2 \dots \beta_1^2)$ verschwindet. Nach obigem Satze zerlegen wir dann den Komplex α_1 in

$$(\alpha_1\pi')^2 = \lambda_2 (p_2\pi')^2 + (\alpha_2\pi')^2$$

und für den Komplex α_2 verschwindet bei passender Wahl von λ_2 die Komitante $(\alpha_2^2 \dots \beta_2^2 \pi^2)$ identisch. Dies fortgesetzt gibt allgemein:

$$(\alpha_{i-1}\pi')^2 = \lambda_i (p_i\pi')^2 + (\alpha_i\pi')^2 \dots \dots \dots (7)$$

und schliesslich:

$$(\alpha_{m-2}\pi')^2 = \lambda_{m-1} (p_{m-1}\pi')^2 + (\alpha_{m-1}\pi')^2$$

wobei für den Komplex α_{m-1} die Komitante $(\alpha_{m-1}^2 \beta_{m-1}^2 \pi^{2m-4})$ identisch Null wird, d.h.: α_{m-1} ist ein spezieller Komplex mit der Leitlinie p_m . Wir erhalten also die gesuchte Zerlegung:

$$K = \lambda_1 (p_1\pi')^2 + \lambda_2 (p_2\pi')^2 + \dots + \lambda_{m-1} (p_{m-1}\pi')^2 + (p_m\pi')^2 \dots (8)$$

Für die Koeffizienten λ_i errechnet man unschwer nach (6) die Werte:

$$\lambda_{i+1} = \frac{1}{m-i} \frac{(a_1^2 \dots a_{m-i}^2 p_1^2 \dots p_i^2)}{(a_1^2 \dots a_{m-i-1}^2 p_1^2 \dots p_{i+1}^2)} \quad (i = 0, 1, \dots, m-2). \quad (9)$$

Hierbei ist p_{i+1} eine willkürliche Gerade des Raumes G_{2m-2i} mit der Gleichung $(\pi^{2i} \alpha_i^2 \dots \beta_i^2) = 0$. Es lässt sich noch beweisen, dass dieser Raum G_{2m-2i} nichts anderes ist als der „Nullraum“ des Gebietes G_{2i} mit der Gleichung (Vgl. Schluss des § 1) $(P_i \pi')^{2i} = 0$, welches durch die i Geraden p_1, p_2, \dots, p_i bestimmt wird.

Wir bemerken noch, dass man aus (8) direkt die λ_i berechnen kann:

$$\lambda_i = \frac{(a_1^2 p_1^2 \dots p_{i-1}^2 p_{i+1}^2 \dots p_m^2)}{(p_1^2 \dots p_{i-1}^2 p_i^2 p_{i+1}^2 \dots p_m^2)} \cdot \dots \cdot \dots \quad (10)$$

Dies stimmt mit (9) überein, denn die Geraden $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_m$ liegen alle in dem durch

$$(\pi^{2i} \alpha_i^2 \dots \beta_i^2) = 0$$

dargestellten G_{2m-2i} und daher gilt:

$$(\pi^{2i} p_{i+1}^2 \dots p_m^2) \equiv C \cdot (\pi^{2i} \alpha_i^2 \dots \beta_i^2) \{\pi\}, \quad C \neq 0 \quad \dots \quad (11)$$

Macht man von (11) bei (10) Gebrauch, so folgt (9).

Astronomy. — *Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen.* VII. *S Bootis.* Von A. A. NIJLAND.

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Instrumente S und R . Die Beobachtungen wurden alle auf R reduziert; die Reduktion $R - S$ beträgt $-0^m.08$. Spektrum $M3 - 5 e$ (*Harv. Ann.* 79 S. 173). Gesamtzahl der hier zu besprechenden Beobachtungen 736 (von 2416845 bis 2426765).

Karte: HAGEN, *Atlas Stell. var. Series III.*

Stern γ ist HA 37 mit k bezeichnet, Stern l mit q . Zur Erzielung eines besseren Anschlusses an das System der HP wurden die Sterne δ und γ ein paar Mal mit beobachtet. Die Sterne a , b und c kommen auch HA 95 vor. Die Spektren sind der Reihe nach G0, K0 und G0. Der Wert $8^m.15$ (HA 95 $8^m.16$) für c muss sich auf die Helligkeit des Paares beziehen. Da ich die beiden Komponenten gleich hell schätze, habe ich für die Reduktion der Stufenskala c zu $8^m.90$ angenommen. Die Sterne g und h kommen auch bei MITCHELL vor (*Mem. Am. Ac.* 14, 286). Als Mittel mehrerer sehr gut übereinstimmenden photometrischen Messungen (*Harvard, Yerkes, Lick, Mc. Cormick*) gibt er $g = 12^m.22$, $h = 12^m.73$. Diese Werte fallen ganz aus der Skala heraus, und ich habe sie leider unberücksichtigt lassen müssen, so wie auch die Helligkeit $h = 12^m.64$

A. A. NIJLAND: MITTLERE LICHTKURVEN VON LANGPERIODISCHEN
VERÄNDERLICHEN. VII. S BOOTIS.

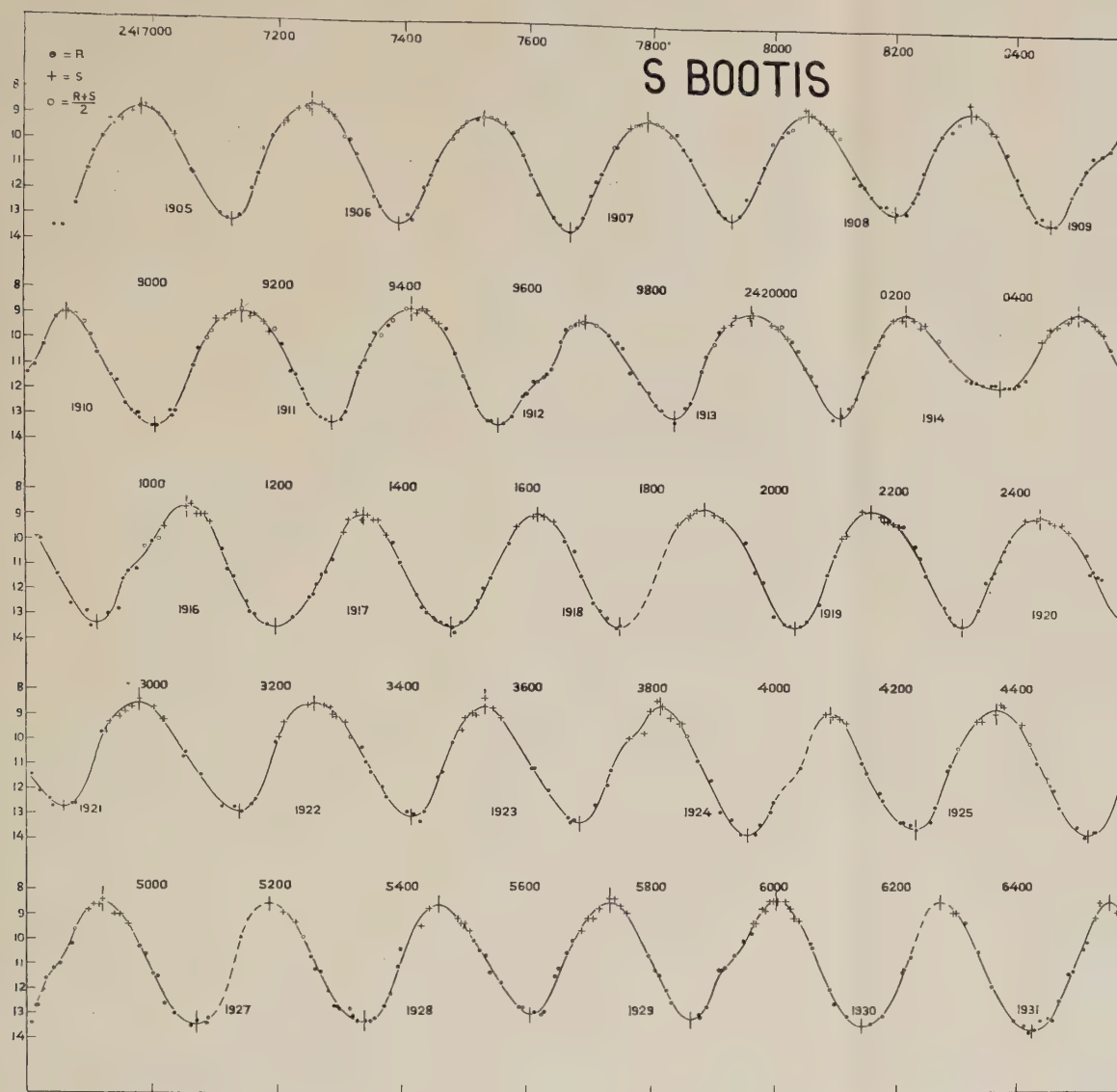


Fig. 1.

TABELLE I. Vergleichsterne.

	BD	HAGEN	St.	HA 29	HA 37	HA 74	Gr.	H
a	+ 53.1714	3	51.5	^m 7.86	^m 7.94	^m 7.91	—	^m 8.12
b	+ 54.1679	4	46.9	—	8.40	8.26	—	8.63
c	+ 54.1666 pr.	6	43.5	8.15	—	—	—	9.01
d	+ 53.1709	—	43.8	—	9.13	8.94	—	(8.97)
d	+ 54.1677	7	38.8	9.94	9.70	9.70	—	9.53
e	+ 54.1672	12	33.4	—	—	—	—	10.12
f	—	18	28.2	—	—	—	^m 10.89	10.70
γ	—	—	26.6	—	—	10.92	11.09	(10.88)
φ	—	19	26.1	—	—	—	—	10.93
g	—	21	19.7	—	—	—	11.48	11.64
h	—	23	14.7	—	—	(12.64)	—	12.20
j	—	26	8.8	—	—	—	—	12.85
k	—	31	2.6 ⁵	—	—	—	13.60	13.53
l	—	—	0.0	—	—	13.76	13.82	13.82

aus HA 74, welche übrigens bei MITCHELL schon verwertet war. Die Sterne *f*, *γ* und *g* wurden 5-mal an die Grenze von *S*, die Sterne *k* und *l* 16-mal an die Grenze von *R* angeschlossen. Die Stufenskala bezieht sich auf die Helligkeit 11^m.0; der Stufenwert ist 0^m.109.

Es liegen 59 Schätzungen der Farbe vor, welche zum grössten Teil in den Jahren 1905 bis 1911 angestellt wurden. Aus den Tabellen IIa und IIb geht hervor, dass sich die Farbe möglicherweise im Laufe der letzten 26 Jahre etwas vertieft hat; eine Abhängigkeit von der Helligkeit scheint nicht zu bestehen. Das allgemeine Mittel ist 1^c.75.

TABELLEN IIa und IIb. Farbenschätzungen.

Zeitraum	n	Farbe	Grösse	n	Farbe
²⁴¹ 6921—7813	19	^c 1.37	^m 8.36	12	^c 2.08
8026—9409	18	1.86	8.57	11	1.95
²⁴² 9933—6534	22	2.02	8.72	12	1.67
	59	1.75	8.93	12	1.50
			9.20	12	1.62
				59	1.76

Die Figur 1 enthält die Beobachtungen, alle auf R reduziert. Die Reihe der Abweichungen (Beobachtung minus Kurve) zeigt 278 Plus-, 236 Minuszeichen, 222 Nullwerte, 238 Zeichenfolgen, 275 Zeichenwechsel. Das Mittel der absoluten Werte der Abweichungen ist $0^m.103$.

Ein Einfluss des Mondscheines auf die Helligkeitsschätzung ist kaum bemerkbar. Es verteilen sich auf 212 bei Mondschein angestellte Beobachtungen die Abweichungen wie folgt: 75 Plus-, 54 Minuszeichen, 83 Nullwerte.

Die Tabelle III enthält die aus der Kurve abgelesenen Epochen der Minima m und der Maxima M .

Die Spalte R wurde mit den einfachen Elementen:

$$\begin{array}{ll} 2421759^d + 273^d E & \text{(für die Minima)} \\ \text{und} & 2421888^d + 273^d E & \text{(für die Maxima)} \end{array}$$

gerechnet.

Die übrigbleibenden $B - R$ sind gross und zeigen einen ausgeprägt systematischen Charakter; es wurde für Maxima und Minima zusammen auf graphischem Wege ein Sinusglied abgeleitet, und die definitiven Elemente F lauten dann:

$$\begin{array}{l} \text{Minimum: } 2421759^d \\ \text{Maximum: } 2421888 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Minimum: } 2421759^d \\ \text{Maximum: } 2421888 \end{array}} \right\} + 273^d E + 25^d \sin 10^\circ (E - 2);$$

$$\frac{M - m}{P} = 0.473.$$

Auf eine genauere Rechnung habe ich verzichtet.

PRAGER'S Katalog für 1932 gibt den Periodenwert $272^d.3$, und das aus sämtlichen von mir seit d. J. 1905 in den *Astr. Nachr.* mitgeteilten Epochen der Minima und Maxima abgeleitete allgemeine Mittel ist $272^d.9$. Da die Berücksichtigung des Sinusgliedes die Quadratsummen für die Minima und die Maxima von 11940 und 10721 auf 1242 bzw. 1135 herabdrückt, kan die Formel F für den hier besprochenen Zeitraum als gut verbürgt gelten. Für die älteren Epochen scheinen ganz andere Elemente zu gelten (s. *G. und L.* I, S. 382). Das daselbst abgeleitete Sinusglied mit einer Periode von 88 Perioden und einer Amplitude von 47^d , das sämtliche Maxima und Minima aus den Jahren 1863 bis 1913 sehr befriedigend darstellt, verträgt sich aber offenbar wieder gar nicht mit meinen Epochen. Vielleicht wird man auch bei diesem Stern erst nach viel längerer Zeit das wahre Gesetz des Lichtwechsels erfinden können. Die extremen Werte des Lichtwechsels sind:

$$\begin{array}{l} \text{Minimum: } v = 13^m.26 \pm 0^m.064 \\ \text{Maximum: } v = 8^m.68 \pm 0^m.036 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Minimum: } v = 13^m.26 \pm 0^m.064 \\ \text{Maximum: } v = 8^m.68 \pm 0^m.036 \end{array}} \right\} (\text{m. F.})^1)$$

Die Amplitude beträgt somit $4^m.58$. Obgleich sowohl beim Minimum

¹⁾ Bei *T Cassiopeiae* (Proc. 34, 219) und *R Cygni* (Proc. 34, 36) sind die m. F. der extremen Helligkeiten zehnmal zu gross angegeben.

TABELLE III.

Minima <i>m</i>						Maxima <i>M</i>				
<i>E</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>
- 18	—	—	—	—	—	²⁴¹ 6982	^m 8.7	6974	+ 8	- 1
- 17	²⁴¹ 7124	^m 13.2	7118	+ 6	+ 2	7251	8.5	7247	+ 4	0
- 16	7389	13.3	7391	- 2	- 2	7525	8.9	7520	+ 5	+ 5
- 15	7663	13.5	7664	- 1	+ 3	7790	8.9	7793	- 3	+ 1
- 14	7926	13.0	7937	- 11	- 2	8053	8.5	8066	- 13	4
- 13	8197	12.6	8210	- 13	0	8322	8.3	8339	- 17	- 4
- 12	8453	13.0	8483	- 30	- 14	8598	8.5	8612	- 14	+ 2
- 11	8735	13.9	8756	- 21	- 2	8864	9.0	8885	- 21	- 2
- 10	9005	13.5	9029	- 24	- 2	9142	8.9	9158	- 16	+ 6
- 9	9284	13.3	9302	- 18	+ 5	9411	8.8	9431	- 20	+ 3
- 8	9550	13.3	9575	- 25	0	9689	9.2	9704	- 15	+ 10
- 7	9833	13.0	9848	- 15	+ 10	9959	8.8	9977	- 18	+ 7
- 6	²⁴² 0106	12.9	0121	- 15	+ 10	²⁴² 0215	8.7	0250	- 35	- 10
- 5	0370	11.7	0394	- 24	- 1	0500	8.5	0523	- 23	0
- 4	0644	12.6	0667	- 23	- 1	0766	8.8	0796	- 30	- 8
- 3	0913	13.4	0940	- 27	- 8	1055	8.6	1069	- 14	+ 5
- 2	1196	13.5	1212	- 16	0	1335	9.0	1342	- 7	+ 9
- 1	1476	13.5	1486	- 10	+ 3	1613	8.9	1615	- 2	+ 11
0	1747	13.5	1759	- 12	- 3	1883	8.7	1888	- 5	+ 4
+ 1	2031	13.5	2032	- 1	+ 3	2157	8.7	2161	- 4	0
+ 2	2308	13.4	2305	+ 3	+ 3	2437	8.9	2434	+ 3	+ 3
+ 3	2581	13.1	2578	+ 3	- 1	2715	8.8	2707	+ 8	+ 4
+ 4	2856	12.9	2851	+ 5	- 4	2980	8.5	2980	0	- 9
+ 5	3139	12.9	3124	+ 15	+ 2	3257	8.5	3253	+ 4	- 9
+ 6	3413	13.1	3397	+ 16	0	3531	8.6	3526	+ 5	- 11
+ 7	3683	13.3	3670	+ 13	- 6	3813	8.6	3799	+ 14	- 5
+ 8	3954	13.8	3943	+ 11	- 11	4090	8.9	4072	+ 18	- 4
+ 9	4230	13.5	4216	+ 14	- 9	4364	8.7	4345	+ 19	- 4
+ 10	4516	13.8	4489	+ 27	+ 2	4645	8.7	4618	+ 27	+ 2
+ 11	4783	13.5	4762	+ 21	- 4	4921	8.5	4891	+ 30	+ 5
+ 12	5070	13.5	5035	+ 35	+ 10	5188	8.5	5164	+ 24	- 1
+ 13	5340	13.4	5308	+ 32	+ 9	5459	8.5	5437	+ 22	- 1
+ 14	5605	13.0	5581	+ 24	+ 2	5733	8.5	5710	+ 23	+ 1
+ 15	5863	13.2	5854	+ 9	- 10	6002	8.4	5983	+ 19	0
+ 16	6141	13.5	6127	+ 14	- 2	6271	8.4	6256	+ 15	- 1
+ 17	6424	13.7	6400	+ 24	+ 11	6551	8.5	6529	+ 22	+ 9
+ 18	6683	13.5	6673	+ 10	+ 1	—	—	—	—	—
		13.26			± 4		8.68			± 4

wie beim Maximum die Abweichungen vom Mittelwert einen starken Überschuss von Zeichenfolgen zeigen, habe ich keine deutliche Gesetzmässigkeit in dem Verlaufe der extremen Werte feststellen können. Die Amplitude hat sich vielleicht in den letzten Jahren etwas (von 4^m.5 bis 5^m.0) vergrössert.

Es wurde wieder der mittlere Verlauf der Lichtkurve in der Nähe der beiden Hauptphasen durch Ablesung der Helligkeit für je 10^d abgeleitet. Die beiden Teilkurven schliessen sich fast genau an einander an (s. die Figur 2), und geben zusammen den Verlauf der mittleren Kurve (Tabelle IV).

TABELLE IV. Die mittlere Kurve.

Phase	v	Phase	v	Phase	v	Phase	v
^d -70	^m 10.97	^d 0	^m 13.26	^d + 70	^m 10.34	^d +140	^m 8.75
-60	11.46	+10	13.20	+ 80	9.88	+150	8.93
-50	11.93	+20	12.96	+ 90	9.46	+160	9.19
-40	12.35	+30	12.55	+100	9.12	+170	9.53
-30	12.73	+40	11.99	+110	8.87	+180	9.92
-20	13.01	+50	11.40	+120	8.72	+190	10.37
-10	13.20	+60	10.84	+130	8.68	+200	10.85

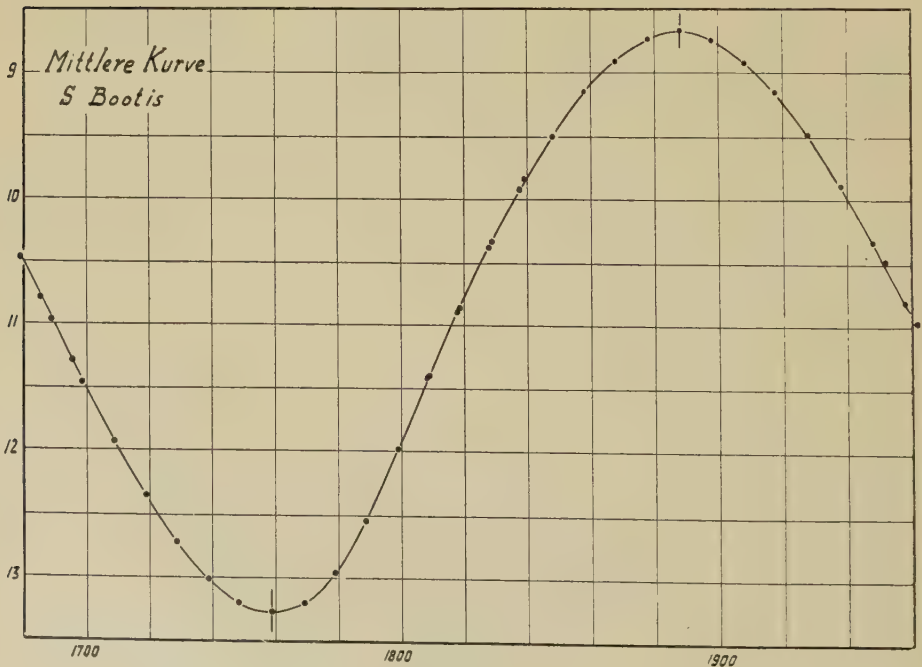


Fig. 2.

Die Kurve ist vollständig glatt und den Lichtkurven von *W Herculis* und *R Trianguli* sehr ähnlich. Von den leichten Verzögerungen vor den Maxima 2418598, 9689 und 2426002 ist in der mittleren Kurve keine Spur mehr zu bemerken. Merkwürdig ist das stark abweichende, durch viele Schätzungen aber gut verbürgte Minimum 2420370 ($S = 11^m.7$).

Die Streuung in der Nähe von 70^d erreicht die Werte :

	<i>m</i>	<i>M</i>	Mittel
im aufsteigenden Aste :	0.376	0.368	0.372
im absteigenden Aste :	0.295	0.330	0.312
Mittel :	0.335	0.349	

Die Streuung ist wieder grösser beim Maximum, und grösser im aufsteigenden Aste. Das Verhältnis der Streuungen $0^m.372$ und $0^m.312$ ist 1.19, das Verhältnis der Geschwindigkeiten des Lichtwechsels bei Auf- und Abstieg 1.12.

Zusammenfassung.

Aus 736 in den Jahren 1905 bis 1931 (2416845 bis 2426765) angestellten Beobachtungen von *S Bootis* sind die folgenden Elemente des Lichtwechsels abgeleitet worden :

$$\begin{aligned} \text{Minimum: } 2421759^d \left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Minimum: } 2421759^d \\ \text{Maximum: } 2421888 \end{matrix}} \right\} + 273^d E + 25^d \sin 10^\circ (E - 2); & \quad \begin{matrix} v = 13^m.26 \\ v = 8 \quad .68 \end{matrix} \\ \text{Maximum: } 2421888 \end{aligned} \quad \text{Amplitude} = 4 \quad .58,$$

woraus $\frac{M - m}{P} = 0.473$.

Die mittlere Lichtkurve hat einen vollkommen glatten Verlauf.

Utrecht, April 1932.

Chemistry. — *Osmosis in systems, consisting of water and tartaric acid.*
III. By F. A. H. SCHREINEMAKERS and J. P. WERRE.

(Communicated at the meeting of April 30, 1932).

Introduction.

If in the osmotic system

$$L(W + X) | L'(W + X) \dots \dots \dots (1)$$

in which *X* represents the tartaric acid, we bring a membrane of cellophane, it will belong to type I (fig. 1) as we have seen in the first commun-

ation¹⁾); the water namely diffuses during the entire osmosis \rightarrow no matter what composition the liquids may have. (We assumed here that the right-side liquid always has a greater X -amount than the left-side liquid.)

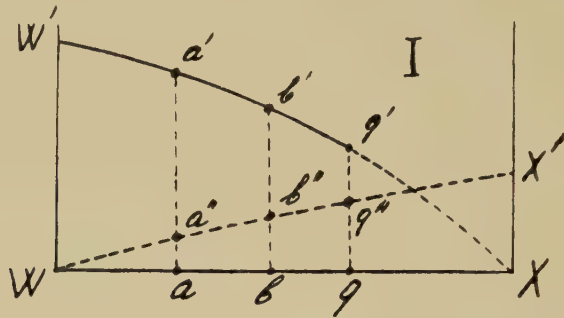


Fig. 1.

If in system (1) we bring a membrane of pig's bladder, it will belong to type IIc (fig. 2) as we have seen in the second communication²⁾). Until now we have considered as a special case only the systems:

$$\text{inv (Water)} | L' (W + X) (2)$$

We found that the direction in which the water diffuses, depends upon the concentration the variable liquid L' has at the beginning of the osmosis; namely

when, at the beginning of the osmosis the variable liquid has a smaller X -amount than liquid s (fig. 2), then during the entire osmosis the water will diffuse $\leftarrow o \star$ namely from the solution towards the pure water;

when at the beginning of the osmosis the variable liquid has a greater X -amount than liquid s (fig. 2), the water will first diffuse \rightarrow and later on $\leftarrow o \star$.

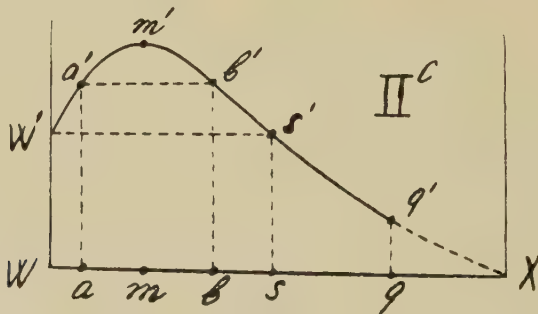


Fig. 2.

We now shall consider a few more cases of system (1).

Systems in which the right-side liquid is invariant. Type IIc fig. 2.

¹⁾ These Proceedings 35, 42 (1932).

²⁾ These Proceedings 35, 162 (1932).

As a special case of system (1), in which we place a membrane of pig's bladder, we take the system

$$L (\text{beg. Water}) | \text{inv } L' (W + X) \dots \dots \dots (3)$$

in which the right-side liquid is in some way kept invariant during the entire osmosis. On the left side of the membrane is a variable liquid L , consisting at the beginning of the osmosis of pure water. As the direction in which the water diffuses in this system (3), depends upon the concentration of the invariant liquid L' , we shall distinguish three cases.

10. When the invariant liquid of system (3) is situated between the points W and m (fig. 2), we represent this by:

$$L (\text{beg. Water}) | \text{inv } L' (Wm) \dots \dots \dots (4)$$

If, in order to concentrate our thoughts, we assume that the invariant liquid is represented in fig. 2 e.g. by point a , then its W -point will be represented by a' .

The variable liquid, consisting of pure water at the beginning of the osmosis, moves towards point a during the osmosis; so its W -point is situated on curve $W'a'$ between W' and a' . From this it appears that during the entire osmosis the right-side liquid has a higher W -point than the left side liquid, so that the water diffuses $\leftarrow o \rightarrow$ during the entire osmosis. So for system (4) during the entire osmosis the D.T.

$$\leftarrow X \leftarrow o \rightarrow W \dots \dots \dots (4a)$$

obtains, in which the water runs through the membrane incongruently and negatively.

In order to elucidate this by an example, we take a system, in which the invariant liquid contains

$$94.259 \% \text{ of } W + 5.741 \% \text{ of tartaric acid.}$$

We represent this system by

$$L (\text{beg. Water}) | \text{inv } L' (5.741 \% X) \dots \dots \dots (5)$$

The data on this system are found in table E , which has been arranged in the same way as the tables of the preceding communication.

From this it appears among other things that the X -amount of the variable liquid, which consisted of pure water at the beginning of the osmosis, had increased after 16 hours to 0.634 %; after 407 hours this X -amount had increased to 5.692 % and had, therefore, almost approached that of the invariant liquid.

It appears from the arrows in table E that during the entire osmosis the tartaric acid and the water have diffused according to the D.T. (4a). As the two substances run in the same direction, the diffusing mixture here is a really existing liquid, so that it is represented by a point between W and X (fig. 2).

TABLE E. System 5.

N ^o .	t	% X of the var. liq. L	Diffused		% X of the invar. liq. L'
			gr. X	gr. W	
1	0	0			5.741
			←	← o *	
2	16	0.634	2.570	1.369	
3	32	1.261	2.420	1.035	
4	53	1.957	2.653	0.882	
5	79	2.760	3.037	0.803	
6	105	3.418	2.461	0.593	
7	146	4.257	1.751	0.304	
8	266	5.013	1.123	0.181	
9	407	5.692	0.394	0.135	

It appears from the diffused quantities of X and W that this diffusing mixture has a greater X -amount than the invariant liquid, so that it is situated in fig. 2 between this invariant liquid and point X . As the variable liquid takes in this mixture, the quantity of this liquid increases continuously during the osmosis. [Comp. for this diffusing mixture the two preceding communications also.]

20. When the invariant liquid of system (3) is situated between the points m and s , we represent this by

$$L \text{ (beg. Water) } | \text{ inv } L' (m s) (6)$$

To concentrate our thoughts, we imagine the invariant liquid represented by point b ; we draw the horizontal line $a'b'$ through the W -point b' of this liquid.

During the osmosis the variable liquid moves from W towards b ; as long as this variable liquid is still situated on the left side of point a and its W -point consequently on $W'a'$, the variable liquid has a lower W -point than the invariant liquid; so the water diffuses $\leftarrow o *$. Consequently in system (6) the osmosis begins with the D.T.

$$\leftarrow X \leftarrow o * W (6a)$$

At the moment the variable liquid arrives in point a , the W -point of the one liquid is situated as high as that of the other; at this moment the osmosis will then proceed according to the D.T.

$$\leftarrow X - o * W (6b)$$

in which no water flows through the membrane.

As soon as the variable liquid has arrived to the right of point *a*, and its *W*-point, therefore, on curve *a'm'b'* above line *a'b'*, the variable liquid will have a higher *W*-point than the invariant liquid; now the water will diffuse \rightarrow . So the osmosis will proceed until the end according to the D.T.

$$\leftarrow X \rightarrow W \dots \dots \dots (6c)$$

It appears from the D.T.'s (6*a*), (6*b*) and (6*c*):

in system (6) the water will first diffuse $\leftarrow o^*$ during some time and afterwards until the end of the osmosis \rightarrow ; in the moment the direction of the water-movement converts, no water flows through the membrane.

In order to elucidate this by an example, we take a system in which the invariant liquid contains

$$87.855 \% \text{ of } W + 12.145 \% \text{ of tartaric acid}$$

we represent this system by

$$L (\text{beg. Water}) | \text{inv } L' (12.145 \% X) \dots \dots \dots (7)$$

The data on this system are found in table *F*. From this it appears among other things that the *X*-amount of the variable liquid had increased after

TABLE F. System (7).

Nº.	<i>t</i>	% <i>X</i> of the var. liq. <i>L</i>	Diffused		% <i>X</i> of the invar. liq. <i>L'</i>
			gr. <i>X</i>	gr. <i>W</i>	
1	0	0			12.145
			\leftarrow	$\leftarrow o^*$	
2	12	0.847	3.380	0.365	
3	24	1.634	2.985	0.032	
			\leftarrow	\rightarrow	
4	45	2.877	4.664	0.539	
5	73	4.269	5.232	0.850	
6	116	5.986	6.484	1.820	
7	186	7.946	7.460	3.097	
8	335	10.190	8.570	4.590	
9	790	11.811	6.202	3.736	

12 hours from 0 % to 0.847 % and after 790 hours to 11.811 %. It appears from the arrows that the water first flows $\leftarrow o^*$ through the membrane for some time and afterwards \rightarrow and that no water will diffuse when the variable liquid contains ± 2 % of tartaric acid.

During the first part of the osmosis (namely when the water diffuses $\leftarrow o^*$) the diffusing mixture is situated between *W* and *X*; it appears from

TABLE G. System (9).

Nº.	<i>t</i>	% <i>X</i> of the var. liq. <i>L</i>	Diffused		% <i>X</i> of the invar. liq. <i>L'</i>
			gr. <i>X</i>	gr. <i>W</i>	
1	0	0			± 57.5
			←	→	
2	9	2.067	6.666	13.508	
3	13	2.908	2.562	5.250	
4	18	3.941	2.966	6.206	
5	23	5.094	3.119	6.665	
6	31	7.084	5.015	10.769	
7	55	13.472	13.898	32.811	
8	78	19.214	10.430	25.981	
9	108	25.880	10.670	28.152	
10	152	34.780	9.990	30.661	
11	220	39.610	10.140	34.534	
12	319	43.330	6.970	23.884	
13	462	49.010	21.720	19.746	
14	504	50.040	3.000	4.515	
15	600	52.080	7.610	7.118	
16	719	53.590	7.020	4.064	

From the determinations¹⁾ of this system, which we now represent by

$$L(\text{beg. Water}) | \text{inv } L' (29.36 \% X) \dots\dots\dots (10)$$

it appears that here also the D.T. (8a) obtains during the entire osmosis. As in this system more water continuously diffused towards the right than *X* towards the left, the diffusing mixture is situated during the entire osmosis to the left of point *W*.

It appears from these considerations and examples that the direction in which the water will move during the osmosis in the osmotic system

$$L(\text{beg. Water}) | \text{inv. } L' (W + X) \dots\dots\dots (11)$$

depends upon the amount of tartaric acid of the invariant liquid; we distinguish three cases:

10. when the invariant liquid is situated between *W* and *m* (fig. 2) the water will during the entire osmosis diffuse ← o *.

¹⁾ J. P. WERRE l. c. pg. 36 table IX.

20. when the invariant liquid is situated between m and s (fig. 2) the water will first diffuse $\leftarrow o *$ and afterwards to the end of the osmosis \rightarrow .
30. when the invariant liquid is situated between s and q (fig. 2), the water will diffuse during the entire osmosis \rightarrow .

Systems in which two variable liquids.

When we take an osmotic system

$$L(W + X) | L'(W + X). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

in which the two liquids are variable, liquid L in fig. 2 will move towards the right during the osmosis and liquid L' towards the left. This osmosis goes on until both liquids get the same composition e .

In this system the substance X always diffuses \leftarrow no matter what concentrations the two liquids may have. With respect to the water, however, we can distinguish four cases; as they may be easily deduced, however, with the aid of the previous considerations, we shall only indicate them briefly.

A. When the two liquids are situated between the points W and m (fig. 2), the water diffuses during the entire osmosis $\leftarrow o *$.

B. When the two liquids are situated between the points m and q , the water diffuses during the entire osmosis \rightarrow .

C. When liquid L is situated, between W and m and liquid L' between m and q , the direction of the W -diffusion depends on

10. the W -amount of the liquids at the beginning of the osmosis; when namely at the beginning of the osmosis liquid L as a higher (lower) W -point than liquid L' , the water diffuses at the beginning of the osmosis \rightarrow ($\leftarrow o *$).

20. the ratio of the quantities of the liquids at the beginning of the osmosis. This ratio namely defines the place of point e (not drawn in fig. 2) where the two liquids get the same composition. When this point e is situated to the left (right) of m , the water moves towards the end of the osmosis $\leftarrow o *$ (\rightarrow).

So we may distinguish four cases; namely, the water diffuses

10. during the entire osmosis $\leftarrow o *$.

20. during the entire osmosis \rightarrow .

30. first $\leftarrow o *$ and later on \rightarrow .

40. first \rightarrow and later on $\leftarrow o *$.

In three systems¹⁾ the case mentioned sub 3 was found experimentally; the water namely first diffused $\leftarrow o *$ and afterwards \rightarrow ; in two other systems²⁾ the water diffused, however, first \rightarrow and afterwards $\leftarrow o *$ and consequently the case mentioned sub 4 occurred.

¹⁾ J. P. WERRE l. c. Tables I, II and III; pgs. 30 and 31.

²⁾ J. P. WERRE l. c. Tables IV and V; pgs. 31 and 32.

By the support of the "Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam" we are enabled to examine the systems 5, 7 and 9 (tables *E*, *F* and *G*), for which we express our thanks to this "Genootschap".

Leiden, Lab. of Inorganic Chemistry.

Botany. — *Die Grundzahl der Tulpenblüte in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur.* I. Von A. H. BLAAUW, IDA LUYTEN und ANNIE M. HARTSEMA. (Meded. N^o. 33 van het Laboratorium voor Plantenphysiologisch Onderzoek, Wageningen, Holland.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932)

Als wir in 1922 und 1924 den Einfluss verschiedener Temperaturen während der Blütenbildung an der Tulpensorte *Pride of Haarlem* studierten, stellte sich heraus, dass die Anzahl der Blütenteile um so grösser ist, je niedriger die Temperatur, worin die Anlage stattgefunden hat. Die Blütenanlage kann innerhalb sehr weiten Grenzen vor sich gehen, so dass in 9° sowohl wie in 28° C. ganz ordentliche Blumen gebildet werden. Bei näherer Betrachtung stellt sich dann aber heraus, dass bei dieser Varietät in 28° C. ganz allgemein die Grundzahl 6—6—3 gebildet wird, mit nur wenigen Ausnahmen, dass aber unterhalb 20° diese monocotyle Grundzahl fast ganz ausgeschaltet wird. Die Blütenkreise zeigen dann — und das fängt auch schon in 25½°—23°—20° C. an — zahlreiche Kombinationen, unter denen aber ganz bestimmte bevorzugt sind. Zahlreich sind besonders die rein vierzähligen Blumen (8—8—4) in 17° C., und weiter die Kombinationen 7—7—3 und 7—7—4 in 17° bis 25½° C., und 9—9—4 in 9° C. Die Erhöhung der normalen Zahl findet nicht in dem einen Kreis auf Kosten eines anderen statt, aber tritt durch die ganze Blume hin in derselben Weise auf. Es trat in den zahlreichen Versuchspflanzen nach ganz verschiedenen Temperaturbehandlungen nie die echte Füllungserscheinung auf¹⁾, obwohl die Anzahl der Blütenteile von der Temperatur durchaus abhängig ist und im Mittel von 15.9 (± 0.37) in 28° C. bis 21.59 (± 0.58) in 9° C. heranstieg. S. Literatur Meded. Lab. v. Pflanzenphysiol. Onderz. N^o. 16—19²⁾).

Es drang sich nun weiter besonders die Frage auf, ob diese Abhängigkeit von der Temperatur in gleicher Weise bei andren Tulpensorten ange-

¹⁾ K. ORTLEPP. Monographie der Füllungserscheinungen bei Tulpenblüten. Leipzig 1915.

²⁾ R. MULDER en I. LUYTEN. De periodieke ontwikkeling van de Darwintulp. Verhand. Kon. Akad. v. Wet. XXVI N^o. 3 1928. Med. 16.

A. H. BLAAUW en M. C. VERSLUYS. De gevolgen van de Temperatuurbehandeling in den zomer voor de Darwintulp. Versl. Kon. Ak. v. Wet. XXXIV 1925. Med. 17.
I. LUYTEN, G. JOUSTRA en A. H. BLAAUW. Idem 2e stuk. Kon. Ak. v. Wet. XXXIV 1925. Med. 18.

R. MULDER en A. H. BLAAUW. Idem 3e stuk. Kon. Ak. v. Wet. XXXIV 1925. Med. 19.

troffen wird. Darüber wurden im Sommer 1927 vorläufige Versuche angestellt, welche folgendes Resultat lieferten.

Es wurden dabei stark auseinander laufende Typen gewählt, sowohl die frühblühenden kleinen *Duc. v. Thol* wie die spätblühenden Darwintulpen; unter den letzten absichtlich neben *Pride of Haarlem* die Varietät *Will. Copland*, welche in mancher Hinsicht sich stark von *Pride of Haarlem* unterscheidet und besonders bekannt ist, weil sie sich von den Darwintulpen am leichtesten für das Frühlreiben verwenden lässt.

In Tab. 1 wollen wir beginnen das Gesamtergebnis der Zählung der Blütenteile im Frühling '28 zusammenzufassen. Diese vorläufigen Versuche wurden mit nur 3 Temperaturen ausgeführt.

Zugleichzeitig wollten wir uns darüber orientieren ob ausserdem auch noch eine Abhängigkeit von der Grösse der Zwiebeln besteht. Dazu wurden die Zwiebeln bei *Pride of Haarlem* in 2 Grössen gewählt von ± 33 Gramm (1650 Gr. pro 50 Stück) und von 15—20 Gramm.

Für jeden Versuch wurden 50 Tulpen im Sommer abgewogen und direkt in 12° (11.5° — 12.5° C.), 17° und 25.5° C. gestellt, die früheren Varietäten am 21—22sten Juni, die späteren ± 11 Juli. Der Vegetationspunkt muss dann meistens noch 1 bis 2 letzte Laubblätter und erst danach die ganze Blume bilden. (Vergleiche die erwähnte Literatur).

Bei der Zählung der Blütenteile gibt es manche Schwierigkeiten, weil bei einer abweichenden Zahl viele *Organe gemischter Natur* vorkommen, welche zum Teil dem einen, zum Teil dem anderen Kreis angehören. Wir kommen in einer späteren Mitteilung auf diese von bestimmten Temperaturen hervorgerufenen Anomalien zurück. Da man unter diesen Anomalien Uebergänge findet von überwiegend Blumenblatt- bis überwiegend Staubblatt-

TABELLE I.
Die gesamte Anzahl der Blütenteile (1927).

	12°	17°	$25\frac{1}{2}^{\circ}$
<i>Pride of Haarlem</i> (± 33 Gramm)	19.98	17.78	15.30
<i>Pride of Haarlem</i> (15-20 Gramm)	18.92	15.56	15.00
<i>Duc van Thol</i>	17.68	15.62	14.98
<i>Van der Neer</i>	16.98	15.06	15.40
<i>Couleur Cardinal</i>	16.12	15.08	15.20
<i>La Remarquable</i>	15.41	14.98	14.78
<i>The Sultan</i>	15.18	14.97	14.89
<i>Golden Horn</i>	15.02	15.00	15.00
<i>William Copland</i>	14.95	14.12	12.58

natur etc., so wurde ein Phyllom so gut wie möglich zu jenen Organen gerechnet, womit es die grösste Ähnlichkeit hatte. Wo diese Entscheidung noch zu schwierig war, wurde die Einteilung so gewählt, dass die Zahlen von Blumen-, Staub- und Fruchtblättern so wenig möglich von der Norm abwichen. Die Zahl der Teile wurde immer beschränkt auf die Anzahl der Insertionsstellen, bei den Fruchtblättern auf die Anzahl der Narben. Wie man unten weiter sehen wird, werden in dieser Weise die Unterschiede, welche durch die Temperatur hervorgerufen werden eher kleiner vorgestellt, als sie in Wirklichkeit sind. Weiter verweisen wir auf die spätere Mitteilung. Wir haben aus demselben Grund die Zusammenstellung der Blumen in erwachsenem Zustand nicht nach ihren 5 Kreisen angegeben, aber uns auf die Zahl der Tepalen, Staub- und Fruchtblätter beschränkt. In der zweiten Mitteilung wollen wir versuchen die Stellung der Blütenteile für gewisse Fälle genauer festzustellen.

Aus der Tabelle I, lässt sich folgendes schliessen:

10. Verschiedene Varietäten reagieren bei ihrer Blütenanlage im gleichen Sinne auf die Temperatur, nämlich, dass im allgemeinen in tieferer Temperatur eine höhere Anzahl gebildet wird.

20. Die Varietäten unterscheiden sich aber erheblich durch den verschiedenen Grad ihrer Abhängigkeit von der Temperatur, indem es Typen gibt welche sehr wenig in der Anzahl ihrer Blütenteile von der Temperatur beeinflusst werden (siehe *Golden Horn*, *La Remarquable*, *The Sultan*), andre Typen welche stark variieren (*Pride of Haarlem*, *W. Copland*, auch *Duc v. Thol*).

30. Ausserdem tritt ein merkwürdiger Unterschied zum Vorschein zwischen *W. Copland* gegenüber Typen wie *Pride of Haarlem* und *Duc v. Thol*. Die letzteren haben bei $25\frac{1}{2}^{\circ}$ C. (und höher) annähernd ihre normale Anzahl (15), und steigen in niedriger Temperatur weit darüber; dagegen ist *W. Copland* bei $25\frac{1}{2}^{\circ}$ C. unter-normal und erreicht bei 12° (bei 9° s. unten) fast die normal zusammengestellte Blume.

40. Eine schwache Ausnahme kommt bei wenigen Varietäten vor (z.B. *v. d. Neer*), indem die Anzahl in den höchsten Temperaturen wieder ein wenig ansteigt. Wir fügen noch einige Zählungen an der Tulpe *v. d. Neer* hinzu, welche im selben Sommer für ein anderes Ziel in mehreren Temperaturen behandelt wurde.

TABELLE II.

Die gesamte Anzahl der Blütenteile bei der Varietät *van der Neer* (1927).

9°	13°	17°	20°	23°	$25\frac{1}{2}^{\circ}$	28°
19.4	16.5	15.2	15.1	15.2	15.1	16.2

Dass diese Ansteigung kein Zufall ist, geht aus den Details der Blütenkreisen hervor, welche zeigen, dass es vorwiegend die Fruchtblätter sind, welche in 28° C. die mittlere Anzahl erhöhen.

TABELLE III.

Anzahl der:	12°			17°			25½°		
	Tep.	Staubbl.	Fruchtbl.	Tep.	St.	Fr.	Tep.	St.	Fr.
<i>Pride of Haarlem</i> ± 33 Gr.	8.52	7.79	3.65	7.40	7.06	3.32	6.04	6.02	3.24
Idem 15-20 Gr.	7.62	7.68	3.62	6.30	6.20	3.06	6.00	6.00	3.00
<i>W. Copland</i>	5.89	5.85	3.21	5.72	5.58	2.82	5.26	5.26	2.51

Die Ansteigung ist also im *Zentrum der Blume am stärksten*, während sonst alle Kreise der Blüte ungefähr gleich stark beeinflusst werden (S. Tab. III, für *Pride of Haarlem* und *W. Copland*).

Eine zweite Ausnahme ist — nach einem Versuch in 1926 — die *Vermillon Brilliant*, welche dasselbe zeigt wie *v. d. Neer*, übrigens aber viel unregelmässiger ist (S. unten).

Die Abhängigkeit der Blütenteile vom Gewicht der Zwiebel. Nach Tab. 1 ist eine solche Abhängigkeit für *Pride of Haarlem* schon sehr wahrscheinlich und würde dann darin bestehen, dass grössere Zwiebeln eine etwas höhere Anzahl erreichen als die kleinen. Mehr überzeugend ist aber der folgende Versuch, welcher übrigens für einen anderen Zweck aufgestellt war. Dabei wurden Gruppen von 24 Zwiebeln verschiedener Grösse ausgesucht. Die ersten 5 Grössen waren Zwiebeln aus der Hauptknospe, die 5e bis 8e wurden unter den aus Nebenknospen entstandenen Zwiebeln gefunden, wobei zum Vergleich die 5e Grösse wiederholt wurde. Für die Allerkleinsten (9e und 10e Grösse) mussten wir noch Zwiebeln von einem Züchter kommen lassen, daher wurde die 8e Grösse wiederholt.

Den kleinen Unterschieden zwischen zwei aufeinander folgenden Gruppen wäre kein Wert beizumessen, wenn nicht die ganze Reihe eine deut-

TABELLE IV.

	1e	2e	3e	4e	5e	5e	6e	7e	8e	8e	9e	10e
Mittl. Gewicht aus 24 Zwiebeln Oct. '25 in Grammen.	47	35	28	23	18	18	15	12½	10	10	8¼	7
Anzahl der Blütenteile	16.74	16.90	16.43	15.83	15.46	15.57	15.57	15.21	15.17	15.0	0	0
Frequenz der Grundzahl 6-6-3 in Proz.	32	35	57	70	79	74	83	92	92	100	—	—

liche Abnahme der Anzahl der Blütenteile bei abnehmender Grösse der Zwiebeln erkennen liesse. Besser noch als aus dem Gewicht kann man die Abweichung beurteilen an dem steigenden Prozent der Blumen mit normaler Grundzahl 663 je kleiner die Zwiebeln sind.

Bei einem Gewicht von ± 8 Gramm blühte keine Zwiebel mehr, wobei die Pflanzen dann nur ein grosses Blatt hervorbrachten; in der zweiten 8en Gruppe blühten 12 von den 24 Pflanzen. Da also auch die Grösse der Zwiebeln die Anzahl der Blütenteile beeinflusst, wurde in den späteren Versuchen von jeder Varietät eine Gruppe von leichteren und schwereren Zwiebeln neben einander gewählt.

Im Sommer 1930 wurden neue Versuche angestellt in 9° bis 28° C. Wie gesagt können wir nicht die Zusammenstellung jeder Blume für alle Varietäten gesondert erwähnen. Wir müssen die Resultate so kurz möglich zusammenfassen und geben dafür das Hauptresultat in der Tabelle V.

TABELLE V.

Die gesamte Anzahl der Blütenteile aus den Versuchen in 1930.

Temperatur der Blütenanlage:	28°	$25\frac{1}{2}^{\circ}$	20°	17°	13°	9°
<i>Pride of Haarlem</i> ± 39 Gr.:	15.02	15.31	16.00	17.69	19.84	21.38
± 23 Gr.:	15.10	15.18	15.52	16.87	19.00	21.29
<i>Duc v. Thol</i> ± 22 Gr.:	14.31	15.23	15.81	16.25	16.69	19.70
± 13 Gr.:	14.85	15.08	15.32	15.55	15.65	18.55
<i>Golden Horn</i> ± 16 Gr.:	14.00	15.00	15.00	15.00	15.26	16.47
<i>Vermillon Brillant</i> ± 27 Gr.:	15.50	15.24	14.97	15.16	16.63	17.91
<i>Bartigon</i> ± 32 Gr.:	12.92	14.53	14.98	15.00	15.40	17.92
± 22 Gr.:	14.14	14.96	15.00	15.06	15.00	16.59
<i>Will. Copland</i> ± 36 Gr.:	10.83	13.54	14.24	14.50	15.02	15.15
± 23 Gr.:	11.94	14.25	14.64	14.67	15.06	15.67

Die früheren Ergebnisse werden bestätigt. Besonders ist der Unterschied zwischen den zwei Darwintulpen *Pride of Haarlem* und *Will. Copland* sehr stark ausgeprägt. Wir haben absichtlich noch eine Darwintulpe *Bartigon* hinzugefügt, welche auch viel für die Frühtreiberei verwendet wird. Auch diese unterliegt stark dem Einfluss der Temperatur; sie steht dabei aber zwischen den beiden extremen Darwintulpen, indem sie unterhalb 20° deutlich über, und oberhalb 20° stark unter die normale Anzahl geht.

Die *Duc van Thol*, welche als Varietät doch weit von einer Darwintulpe wie *Pride of Haarlem* entfernt ist, steht ihr in dieser Erscheinung sehr nah, wie dies auch in 1927 gefunden wurde.

Der Grad und die Weise, worauf die Temperatur die Anzahl der Blütenteile beeinflusst, ist bei den Varietäten sehr verschieden, zeigt aber nach den bisherigen Erfahrungen *keinen Zusammenhang mit der Verwandtschaft*. *Golden Horn* konnte in Tab. V nur für kleinere Zwiebeln erwähnt werden, da die grössere zu viel von Krankheiten gelitten hatten. Die *unter-normale* Anzahl bei 28° C. wird *besonders von den Fruchtblättern veranlasst*, derer man 31×2 und nur 16×3 findet. Die unternormalen Zahlen von *Bartigon* und *Copland* dagegen finden mehr in den *gesamten Blütenkreisen ihre Ursache*: Bei *Copland* ist die mittlere Anzahl der Perianth-, Staub- und Fruchtblätter in 28° resp. $4.52-3.96-2.35$; bei *Bartigon* $5.33-5.17-2.42$.

Die Tab. I ist in Fig. 1 dargestellt, wodurch der Unterschied der Varietäten noch deutlicher hervortritt. Dabei ist die *Vermillon Brillant* nur

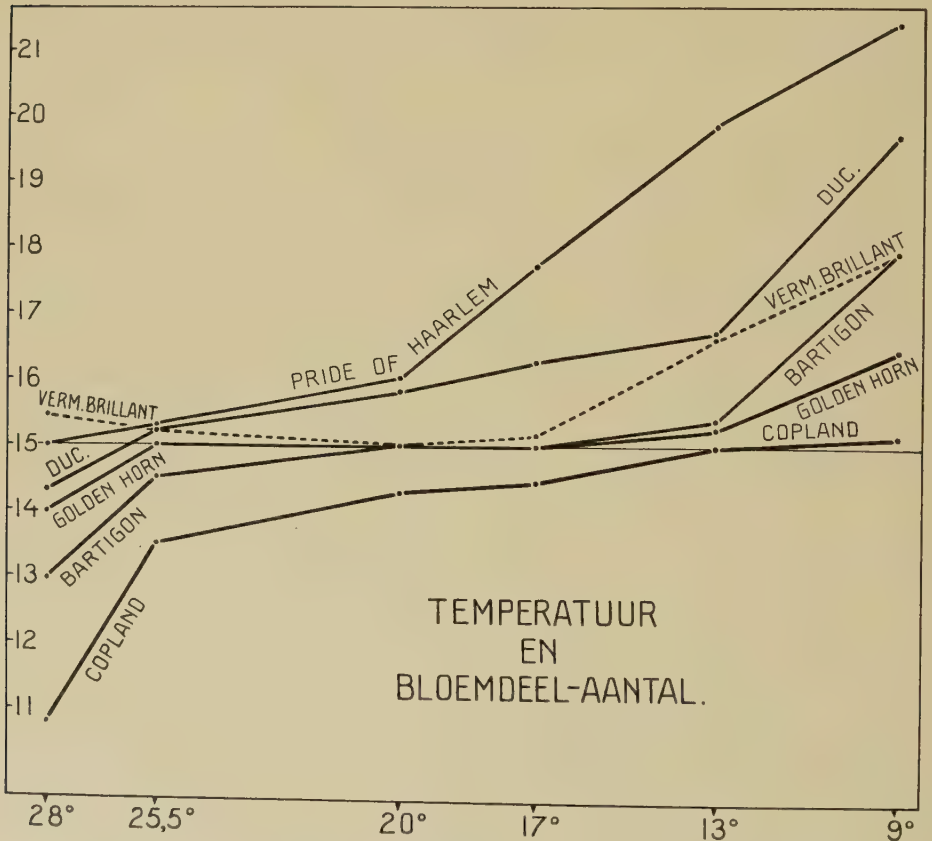


Fig. 1. Die mittlere Anzahl der Blütenteile in verschiedenen Temperaturen.

gestrichelt eingetragen. Sie bildet eine Ausnahme und zwar stärker als die Figur vermuten lässt. Die Fruchtblätterzahl steigt in höherer Temperatur wieder (s. oben): wir fanden z.B. in 20° C. 38×3 , aber in 28° C. 28×3 , — 14×4 , — 1×5 , — und 1×6 . In den extremen Temperaturen

(9°, 13° und 28°) werden Perianth- und Staubblätter in den verschiedenen Blumen sowohl vermehrt als verringert, eine Erscheinung welche bis jetzt bei keiner der Untersuchten Varietäten auftrat. Die Folge ist eine aussergewöhnlich grosse Anzahl Kombinationen: in 9° C. lieferten 32 Blumen 27 verschiedene Anordnungen.

Die Abhängigkeit von der Grösse der Zwiebeln tritt für *Pride of Haarlem* (23 gegenüber 39 Gr.) nur bei 13° bis 20° C. zum Vorschein, ist sonst weniger deutlich als in Tab. I. Sie ist aber durch den Versuch von Tab. III unzweifelhaft festgestellt. Wo die Anzahl übernormal ist, (*Duc van Thol* 9° bis 25½°, *Bartigon* 9° und 13° C.), ist dies im allgemeinen bei schwereren Zwiebeln stärker der Fall als bei kleineren.

Nun sehen wir aber bei *Will. Copland*, bei *Bartigon* (25½° u. 28° C.) und bei *Duc v. Thol* (28° C.), dass auch da wo die Anzahl unternormal ist, diese Abweichung im allgemeinen bei den grösseren Zwiebeln stärker ist. Bei *Pride of Haarlem* sahen wir, dass die allerkleinsten Zwiebeln, welche noch gerade blühen können, und also auf der Grenze der Blühfähigkeit stehen, schliesslich alle 6—6—3 gebaut sind. Dasselbe fanden wir jetzt bei *W. Copland*. Betrachtet man in Tab. VII die Zahlen für *Copland* von 29—36 Gr. in 13°, 17° und 20° C., so muss man zum Vergleich daneben stellen, dass bei Zwiebeln von nur 15—20 Gr. in 13° C. 49 × 663 und nur 1 übernormale vorkamen; in 17° C. 45 × 663 und 4 unternormale; in 20° C. 44 × 663 und 5 unternormale. Im allgemeinen können wir also schliessen: je grösser die Zwiebeln sind, desto stärker ist die Abweichung von der normalen Blütenzahl 6—6—3, einerlei ob diese sich äussert in einer Vermehrung oder in einer Verringerung der Anzahl.

Wir können wegen Mangel an Raum nur von *Pride of Haarlem* (Tab. VI) und *Will. Copland* (Tab. VII) alle gefundenen Blütenzahlen der schwereren Zwiebeln publizieren, wobei die Zahlen von 1927 aus 12° C. mit jenen von 13° C. zusammengefügt wurden. Diese beiden Varietäten wurden gewählt, weil die beiden sich am stärksten von einander unterscheiden. Die Anzahl der gezählten Blumen ist oberhalb der Zeilen in Klammern erwähnt; zum richtigen Vergleich sollte man die Zahlen in Prozenten umrechnen. In der letzten Zeile ist die Blumenzahl von der betreffenden Zusammenstellung zusammengezählt. Dies ist nur geschehen um die Frequenz gewisser Blütenzahlen noch deutlicher hervortreten zu lassen; übrigens darf man die Zahlen in dieser Zeile nicht direkt miteinander vergleichen.

Weiter haben wir schon darauf hingewiesen, dass es wegen mancher durch Verwachsungen abnorm gewordener Blütenteile oft schwierig war die Zusammenstellung richtig anzugeben. Wir beschränken darum unsre Schlüsse auf die Hauptsachen und wollen auf zahlreiche Kombinationen, welche nur in 1 bis wenigen Prozenten gefunden wurden keinen Wert legen. Wenn man aber die ganze Liste von *W. Copland* und *Pride of Haarlem* übersieht, so treten ganz bestimmte Kombinationen — für eine

TABELLE VI.

Pride of Haarlem (29—39 Gr.). Die Zusammenstellung der Blumen in verschiedenen Temperaturen.

	9° (114)	13° (177)	17° (200)	20° (276)	25½° (302)	28° (68)	(1137)
6-4-3	—	—	—	—	—	1	1
6-5-3	—	—	—	—	1	2	3
6-5-4	—	—	—	—	1	1	2
6-6-2	—	—	—	1	—	—	1
6-6-3	2	2	22	113	166	53	358
6-6-4	—	—	—	1	57	5	63
6-6-5	—	—	—	—	2	—	2
6-7-3	1	—	2	15	8	—	26
6-7-4	—	1	1	4	15	—	25
6-8-3	—	1	1	—	1	—	3
6-9-3	—	—	1	—	—	—	1
7-6-3	—	8	25	19	2	—	54
7-6-4	—	1	1	—	1	2	5
7-7-3	1	6	19	46	11	1	84
7-7-4	5	5	4	10	19	—	43
7-7-5	—	—	—	—	3	—	3
7-8-3	—	3	9	5	1	—	18
7-8-4	1	6	4	5	1	—	17
7-8-5	1	—	—	—	—	—	1
7-9-3	—	—	1	—	—	—	1
7-9-4	2	2	2	—	—	—	6
7-9-5	1	—	—	—	—	—	1
7-10-4	1	—	1	—	—	—	2
7-10-5	1	—	—	—	—	—	1
7-11-4	1	—	—	—	—	—	1
8-5-3	—	—	—	—	1	—	1
8-6-3	—	1	—	1	—	—	2
8-7-3	—	5	10	6	2	—	23
8-7-4	1	5	9	7	2	—	24
8-7-5	2	—	—	—	—	—	2
8-8-3	1	1	5	9	—	1	17
8-8-4	13	30	31	20	5	1	100
8-8-5	1	—	—	—	—	—	1
8-9-3	—	2	1	—	—	—	3
8-9-4	7	2	3	1	—	—	13
8-9-5	2	—	—	—	—	—	2
8-10-3	1	1	—	—	—	—	2
8-10-4	2	—	—	—	—	—	2
8-10-5	1	—	—	—	—	—	1
8-11-4	—	1	—	—	—	—	1
8-11-5	1	—	—	—	—	—	1
9-6-2	—	1	—	—	—	—	1
9-6-3	—	1	3	—	—	—	4
9-7-3	4	4	3	1	—	—	12

TABELLE VI (Fortsetzung).

Pride of Haarlem (29—39 Gr.). Die Zusammenstellung der Blumen in verschiedenen Temperaturen.

	9° (114)	13° (177)	17° (200)	20° (276)	25½° (302)	28° (68)	(1137)
9—7—4	4	2	1	1	1	1	10
9—7—5	1	—	—	—	—	—	1
9—8—3	3	4	6	2	—	—	15
9—8—4	7	10	5	2	2	—	26
9—8—5	4	—	—	—	—	—	4
9—9—2	—	1	—	—	—	—	1
9—9—3	2	7	2	—	—	—	11
9—9—4	12	10	1	2	—	—	25
9—9—5	1	—	—	1	—	—	2
9—9—6	1	—	—	—	—	—	1
9—10—3	—	3	—	—	—	—	3
9—10—4	4	2	—	—	—	—	6
9—10—6	1	—	—	—	—	—	1
9—11—4	1	—	—	—	—	—	1
9—11—5	1	—	—	—	—	—	1
10—6—3	—	—	—	1	—	—	1
10—6—4	1	—	—	—	—	—	1
10—7—3	—	4	5	—	—	—	9
10—7—4	7	1	—	1	—	—	9
10—8—3	—	4	3	—	—	—	7
10—8—4	4	6	5	—	—	—	15
10—9—3	1	2	1	1	—	—	5
10—9—4	4	9	4	—	—	—	17
10—9—5	3	3	—	—	—	—	6
10—10—3	1	—	—	—	—	—	1
10—10—4	2	4	1	—	—	—	7
10—10—5	2	4	1	—	—	—	7
10—11—3	—	1	—	—	—	—	1
10—11—4	1	1	—	—	—	—	2
10—11—5	1	—	—	—	—	—	1
11—7—3	—	2	1	—	—	—	3
11—7—4	1	—	1	—	—	—	2
11—8—3	—	—	2	—	—	—	2
11—8—4	3	—	2	—	—	—	5
11—8—5	2	—	—	—	—	—	2
11—9—4	3	3	—	1	—	—	7
11—9—5	1	1	—	—	—	—	2
11—10—3	1	—	—	—	—	—	1
11—10—4	—	1	—	—	—	—	1
11—13—8	—	—	1	—	—	—	1
12—7—4	1	—	—	—	—	—	1
12—8—2	—	1	—	—	—	—	1
12—9—4	—	1	—	—	—	—	1
18—21—10	—	1	—	—	—	—	1

TABELLE VII.

Will. Copland. (29—36 Gramm). Die Zusammenstellung der Blumen in
verschiedenen Temperaturen.

	9° (45)	13° (96)	17° (94)	20° (50)	25½° (97)	28° (48)	(430)
3 2 3	—	—	—	—	—	1	1
3 3 2	—	—	—	—	—	1	1
3 4 2	—	—	—	—	—	1	1
3 4 3	—	—	—	—	1	—	1
3 6 4	1	—	—	—	—	—	1
4 3 2	—	—	—	—	1	2	3
4 3 3	—	1	—	—	—	2	3
4 4 2	—	—	—	—	2	11	13
4 4 3	—	—	—	1	4	2	7
4 5 2	—	—	2	1	—	2	5
4 5 3	—	—	—	2	—	—	2
4 6 3	—	—	—	—	1	—	1
5 2 3	—	—	—	—	—	1	1
5 3 2	—	—	—	—	1	—	1
5 3 3	—	2	—	—	—	—	2
5 4 2	—	—	—	—	4	7	11
5 4 3	—	1	2	—	4	8	15
5 4 4	—	—	—	—	1	—	1
5 5 2	—	2	3	4	16	5	30
5 5 3	2	6	10	2	21	—	41
5 5 4	—	2	—	—	1	—	3
5 5 5	—	—	—	—	1	—	1
5 6 2	—	—	4	1	—	—	5
5 6 3	3	—	3	1	3	—	10
5 6 4	2	—	—	—	—	—	2
5 7 3	1	1	—	—	—	—	2
5 7 4	—	1	—	—	—	—	1
6 3 2	—	—	—	—	1	—	1
6 3 3	—	—	—	—	—	1	1
6 4 2	—	—	1	—	—	—	1
6 4 3	—	—	—	1	4	—	5
6 5 2	—	—	—	1	2	1	4
6 5 3	4	5	—	3	8	2	22
6 6 2	—	—	2	—	1	—	3
6 6 3	17	59	65	31	20	1	193
6 6 4	5	4	1	1	—	—	11
6 7 3	5	1	—	—	—	—	6
6 7 4	1	2	—	—	—	—	3
7 5 3	—	1	—	—	—	—	1
7 6 3	1	—	—	1	—	—	2
7 7 3	2	3	—	—	—	—	5
7 7 4	1	2	—	—	—	—	3
7 7 5	—	1	—	—	—	—	1
8 6 3	—	1	1	—	—	—	2
9 7 4	—	1	—	—	—	—	1

gewisse Temperatur und Varietät — stark hervor. Es ist bemerkenswert, dass die 1137 Pflanzen von *Pride of Haarlem* in 6 Temperaturen schon nicht weniger als 88 verschiedene Zusammenstellungen der Blume zeigen, wenn man die vielen Zwischenfälle durch Verwachsungen noch beiseite lässt und die 2 Kreise der Perianth- und der Staubblätter zusammenzählt. Desgleichen bei *W. Copland* 45 Kombinationen bei 430 Blumen. Wichtiger ist es aber auf die meist frequenten Kombinationen zu achten bei den verschiedenen Varietäten. Dafür geben wir schliesslich Tab. VIII, während Tab. IX die Frequenz der Grundzahl bei verschiedener Temperatur und Varietät angiebt. Dabei fügen wir *Fig. 2*, welche die Variabilität der Blütenteilenzahl für zwei Varietäten, sowohl in 9° wie in 28° in Prozenten ausdrückt. Man sieht daraus zwischen welchen weiten Grenzen die *ungefüllten* Tulpenblumen variieren. (Die *Golden Horn* ist nicht mit den andren direkt zu vergleichen, da die Zwiebeln sehr leicht waren (15—20 Gr.) und deshalb die Frequenz der Grundzahl zu hoch ist.)

Es gibt also Temperaturen, worin die Varietäten nie oder selten eine Blume mit der „normalen“ Grundzahl bilden. In Gegenden wo die Bodentemperatur ziemlich hoch oder niedrig ist während der Zeit der Blütenbildung, würde man von gewissen Varietäten, wenn sie wild wachsen würden, in einer genauen Beschreibung eine ganz variable Anzahl von Blütenteilen als normal angegeben haben. Z.B. bei *W. Copland* in heissen Gegenden „Perianth- und Staubblätter 4—6, meistens 5, Fruchtblätter 2—3“, bei *Pride of Haarlem* in kalten Ländern, „Perianth- und Staubblätter meistens 7 bis 10, Fruchtblätter 3—5“, u.s.w. Dass wir dennoch die Zusammenstellung 6—6—3 die „normale“ Grundzahl nennen, bleibt vollkommen richtig, obwohl es begreiflich ist, wenn man die Frage stellen will, warum denn eigentlich gerade 6—6—3 normal genannt wird, alle andere Kombinationen abweichend. Sieht man *Pride of Haarlem* in 13° mit 8—8—4 als Hauptzahl, *W. Copland* in 28° mit 4—4—2 als häufigste Kombination bei einem fast vollständigen Fehlen von 6—6—3, so ist diese Frage berechtigt; man könnte sagen dass nur eine gewisse Temperatur gerade 6—6—3 als häufigste Kombination ergibt. Dass aber 6—6—3 mit Recht „das Normale“ heisst, dafür plädieren wichtige Gründe. Erstens die Zusammenstellung der Blüte der *Liliaceae* im allgemeinen, wobei abweichende Zahlen nur seltene Ausnahmen sind; zweitens die Erfahrung in unsren Versuchen, dass bei allen Varietäten in einer gewissen Temperatur ein Prozentsatz mit 6—6—3 erreicht wird, wozu keine andere Kombinationen (in anderer Temperatur) ansteigen; drittens, dass diejenigen Temperaturen, worin die Blume die meisten 6—6—3 aufiefert die wenigsten Abnormitäten und Verwachsungen zeigen. Es ist noch die Frage ob gewisse wildwachsende *Liliaceae*, welche in der Zusammenstellung ihrer Blüte von der Grundzahl abweichen, dies vielleicht nur tun, weil sie bei einer bestimmten Temperatur im Boden ihre Blüten bilden.

Wir haben bis jetzt nur die Beschreibung einer Erscheinung gegeben,

TABELLE VIII.

Das Vorkommen der meist frequenten Kombinationen
in der Tulpenblüte ausserhalb der Normalzahl.

4—4—2	<i>W. Copland</i> 28°	23 ⁰ / ₁₀
5—4—2	<i>W. Copland</i> 28°	15 „
5—4—3	<i>W. Copland</i> 28°	16 „
5—5—2	<i>W. Copland</i> 28°	10 „
	<i>W. Copland</i> 25 ¹ / ₂ °	16 „
5—5—3	<i>Bartigon</i>	16 „
	<i>W. Copland</i> 20°	22 „
6—5—2	<i>W. Copland</i> 13°	11 „
	<i>Golden Horn</i> 28°	21 „
6—6—2	<i>Golden Horn</i> 28°	43 „
6—6—4	<i>W. Copland</i> 9°	11 „
	<i>Pride of H.</i> 25 ¹ / ₂ °	19 „
6—7—3	<i>W. Copland</i> 9°	11 „
6—8—3	<i>Golden Horn</i> 9°	19 „
	<i>Golden Horn</i> 13°	13 „
7—6—3	<i>Duc v. Thol</i> 25 ¹ / ₂ °	11 „
	<i>Pride of H.</i> 17°	13 „
7—7—3	<i>Golden Horn</i> 9°	16 „
	<i>Duc v. Thol</i> 20°	28 „
7—7—4	<i>Duc v. Thol</i> 17°	23 „
	<i>Pride of H.</i> 20°	17 „
7—8—4	<i>Bartigon</i> 9°	16 „
7—8—5	<i>Duc v. Thol</i> 9°	18 „
8—8—4	<i>Duc v. Thol</i> 9°	12 „
	<i>Pride of H.</i> 17°	16 „
9—9—4	<i>Pride of H.</i> 13°	17 „
	<i>Pride of H.</i> 9°	11 „
	<i>Pride of H.</i> 9°	10 „

TABELLE IX.

Frequenz der Grundzahl 6—6—3 (in Prozenten).

	9°	13°	17°	20°	25 ¹ / ₂ °	28°
<i>Pride of Haarlem</i> . . .	2	1	11	49	55	78
<i>Duc v. Thol</i>	0	17	27	39	56	15
[<i>Golden Horn</i>	22	78	100	100	93	43]
<i>Vermillon Brillant</i> . .	0	33	90	97	80	52
<i>Bartigon</i>	10	84	100	94	74	31
<i>W. Copland</i>	38	61	69	62	21	2

welche sich durch experimentell-morphologische Versuche herausstellte. Die wenigen Ausnahmen beiseite lassend, trifft dabei wohl am meisten:

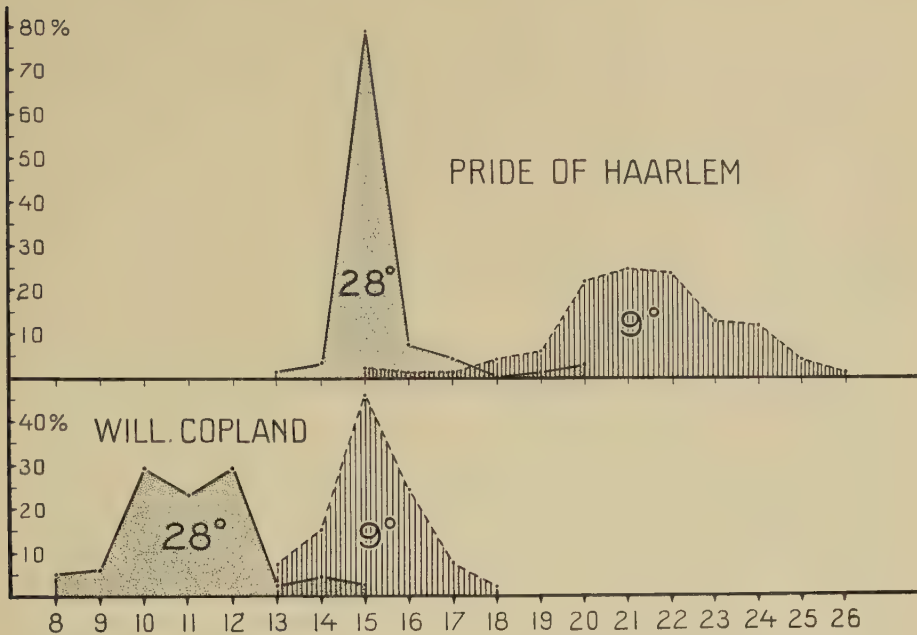


Fig. 2. Die Variabilität der Anzahl, wenn die Blütenteile in 9° und in 28° C. gebildet wurden.

einerseits die gleiche Richtung worin die Anzahl der Blütenteile mit der Temperatur variiert, andererseits der Unterschied, welchen die verschiedenen Varietäten dabei aufweisen (Fig. 1). Vorläufig können wir nur die Vermutung aussprechen dass die Steigung der Anzahl bei Erniedrigung der Temperatur mit der Blütenbodenoberfläche, welche in den tieferen Temperaturen grösser ist als in den höheren, zusammenhängt. Wir hoffen in einer zweiten Mitteilung hierauf näher zurückzukommen.

Die häufigsten Kombinationen kann man sich jetzt nach Tab. VIII für morphologische Zwecke sammeln. Von einigen wollen wir noch versuchen festzustellen auf welche Weise die Abänderung von der Grundzahl stattfindet.

April 1932.

Mathematics. — *Eine Eigenschaft der Umlegungen.* Von G. SCHAAKE.
(Communicated by Prof. JAN DE VRIES).

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

§ 1. Für eine Umlegung in einem linearen n -dimensionalen Raume gilt die Eigenschaft, dass die Mitten der Strecken PP' (P und P' sind zugeordnete Punkte) in einem linearen $(n-1)$ -dimensionalen Raume liegen.

Diese Eigenschaft folgt für eine Umlegung in der Ebene aus dem Umstande, dass man für jede derartige Umlegung den einem Punkte P zugeordneten Punkt P' immer bekommen kann durch Spiegelung des Punktes P an einer bestimmten Geraden s und eine bestimmte Translation des gespiegelten Punktes parallel zu s ; auch können diese Spiegelung und diese Translation vertauscht werden. Der folgende geometrische Beweis der letztgenannten Eigenschaft ist von Prof. Dr. JAN DE VRIES gegeben worden.

Die den Punkten A und B für eine Umlegung in der Ebene zugeordneten Punkte seien bzw. A' und B' . Verschiebe $A'B'$ durch die Translation, die A' in A bringt; dann komme B' in B'' . Sei s' die Halbierende des Winkels BAB'' und s die Gerade durch die Mitte der Strecke AA' parallel zu s' . Die Projektionen der Strecken AB und $A'B'$ auf s sind einander in Grösse und Vorzeichen gleich; die Abstände der Punkte A und A' von s und auch die Abstände der Punkte B und B' von s sind einander entgegengesetzt und gleich. AB kann also durch eine Spiegelung an s und eine Translation parallel zu s in $A'B'$ übergeführt werden.

§ 2. Dass für eine Umlegung im dreidimensionalen Raume die Mitten der Strecken PP' in einer Ebene liegen, folgt aus der Eigenschaft, dass man für eine Umlegung im Raume den einem Punkte P zugeordneten Punkt P' immer bekommen kann durch Spiegelung des Punktes P an einer bestimmten Ebene σ und eine bestimmte Drehung des gespiegelten Punktes, deren Achse senkrecht auf σ steht (eventuell eine bestimmte Translation parallel zu σ); natürlich können diese Spiegelung und diese Drehung (oder Translation) wieder vertauscht werden. Für diese Eigenschaft geben wir ebenfalls einen geometrischen Beweis.

Eine Umlegung im Raume sei bestimmt von den drei Punktepaaaren (A, A') , (B, B') , (C, C') . Wir verschieben A', B', C' durch die Translation, die A' in A bringt; dann kommen B' und C' bzw. in B'' und C'' . Nun betrachten wir die Halbierenden der Winkel BAB'' und CAC'' und eine Ebene, die durch diese (vielleicht zusammenfallenden) Geraden

geht. Die Abstände der Punkte B und B'' und auch die Abstände der Punkte C und C'' zu dieser Ebene sind einander entgegengesetzt und gleich. Folglich sind die Projektionen der Dreiecke ABC und $AB''C''$ auf diese Ebene, weil sie die drei Seiten gleich haben, in ihr kongruent oder symmetrisch.

Wenn sie in ihrer Ebene symmetrisch sind, so sind sie einanders Spiegelbild für eine durch A gehende Gerade t ihrer Ebene und dann sind die Dreiecke ABC und $AB''C''$ auch einanders Spiegelbild für t . In diesem Fall sind die Projektionen der Dreiecke ABC und $AB''C''$ auf jede Ebene durch t in dieser Ebene symmetrisch. Nehmen wir die besondere Ebene durch t , welche senkrecht steht auf der Ebene des Dreiecks ABC , so liegen die Projektionen von A, B und C auf einer Geraden, ebenso wie die Projektionen von A', B' und C' . Dann sind die Projektionen der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ also in der Projektionsebene auch kongruent.

Es giebt folglich immer eine durch A gehende Ebene σ' , derart dass die Projektionen der Dreiecke ABC und $AB''C''$, also auch die Projektionen der Dreiecke ABC und $AB'C'$ auf σ' in σ' kongruent sind. Dasselbe gilt für die Ebene σ , die durch den Mittelpunkt von AA' geht und mit σ' parallel ist. Überdies sind die Abstände von A und A' , jene von B und B' und auch jene von C und C' zur Ebene σ jedesmal einander entgegengesetzt und gleich. Durch eine Rotation um eine auf σ senkrechte Achse (eventuell eine Translation parallel zu σ) kann die Projektion des Dreiecks ABC auf σ mit jener des Dreiecks $A'B'C'$ zur Deckung gebracht werden. Wenn A, B und C durch diese Rotation bzw. in \bar{A}, \bar{B} und \bar{C} kommen, so sind \bar{A} und A', \bar{B} und B', \bar{C} und C' jedesmal einanders Spiegelbild für σ .

Wenn AB und AB'' in einanders Verlängerung fallen, und dies für AC und AC'' nicht gilt, so wird die Halbierende b_1 des Winkels BAB'' , die dann mit jeder durch A gehenden und zu BB'' senkrechten Geraden zusammenfallen kann, unbestimmt, die Halbierende b_2 ist dagegen bestimmt. In diesem Falle steht b_2 nach einem bekannten Satze senkrecht auf BB'' . Wenn wir b_1 nicht mit b_2 zusammenfallen lassen, so finden wir für σ' die durch A gehende und zu BB'' senkrechte Ebene; wenn aber b_1 mit b_2 zusammenfällt, so sind die orthogonalen Projektionen von ABC und $AB''C''$ auf jede durch b_1 gehende Ebene in dieser Ebene symmetrisch; wir finden auch so dieselbe Ebene σ' . Wenn aber überdies AC und AC'' in einanders Verlängerung fallen, so bilden sowohl die Geraden b_1 als auch die Geraden b_2 einen Büschel; nun kann die Ebene σ' jede durch A gehende Ebene sein. In diesem Falle ist die Umlegung die Spiegelung an der Mitte der Strecke AA' .

Der Fall, dass b_1 und b_2 zusammenfallen, ist schon behandelt worden.

§ 3. Die Gültigkeit der im Anfang dieser Mitteilung genannten Eigenschaft für eine Umlegung in einem linearen n -dimensionalen Raume R_n .

folgt schliesslich aus der Eigenschaft, dass man jede Umlegung in R_n erhalten kann durch auf einander folgende Ausführungen einer Spiegelung an einem in R_n liegenden $(n-1)$ -dimensionalen linearen Raume R_{n-1} und einer zu R_{n-1} parallelen Bewegung.

Wir beweisen die letztgenannte Eigenschaft durch vollständige Induktion. Dazu setzen wir voraus, dass sie für einen linearen $(n-1)$ -dimensionalen Raum bewiesen sei. Nun bestimmen wir eine Umlegung in R_n durch Angabe der n Punktpaare $(A_0, A'_0), (A_1, A'_1), \dots, (A_{n-1}, A'_{n-1})$. Durch die Translation, die A'_0 in A_0 bringt, kommen A'_1, \dots, A'_{n-1} bzw. in A''_1, \dots, A''_{n-1} . Wir denken uns nun die Halbierenden der Winkel $A_1 A_0 A''_1, \dots, A_{n-1} A_0 A''_{n-1}$, und wir bringen einen linearen Raum R_{n-1} an, der diese $n-1$ durch A_0 gehenden Geraden enthält. Die Abstände der Punkte A_1 und A''_1 , der Punkte A_2 und A''_2, \dots , der Punkte A_{n-1} und A''_{n-1} zu diesem R_{n-1} sind jedesmal einander entgegengesetzt und gleich. Also sind die orthogonalen Projektionen von $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ und von $A_0 A''_1 \dots A''_{n-1}$ auf den angebrachten Raum R_{n-1} entweder in diesem Raume kongruent oder symmetrisch. Wenn diese Projektionen symmetrisch sind, giebt es nach der Induktionsvoraussetzung ein durch A_0 gehender im Raum R_{n-1} liegender Raum R_{n-2} derart, dass die Abstände der projizierten Punkte A_1 und A''_1 , der projizierten Punkte A_2 und A''_2, \dots und der projizierten Punkte A_{n-1} und A''_{n-1} zu diesem R_{n-2} jedesmal einander entgegengesetzt und gleich sind und die Projektionen von $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ und von $A_0 A''_1 \dots A''_{n-1}$ auf diesen R_{n-2} kongruent sind. Die Abstände der Punkte A_1 und A''_1 , der Punkte A_2 und A''_2, \dots der Punkte A_{n-1} und A''_{n-1} zu jedem durch R_{n-2} gehenden Raum R_{n-1} sind einander entgegengesetzt und gleich und die Projektionen von $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ und $A_0 A''_1 \dots A''_{n-1}$ auf einen derartigen R_{n-1} sind in diesem Raume symmetrisch. Wir denken uns nun den durch den Raum R_{n-2} gehenden Raum R_{n-1} der senkrecht steht auf dem Raume R_{n-2} , welcher von $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ bestimmt ist. Die Projektionen von $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ und $A_0 A''_1 \dots A''_{n-1}$ auf den nun konstruierten Raum R_{n-1} liegen jede für sich in einem R_{n-2} und können also durch eine Bewegung im Projektionsraum R_{n-1} zur Zusammenfallung gebracht werden.

Es giebt also immer einen durch A_0 gehenden linearen $(n-1)$ -dimensionalen Raum Σ' , derart dass die Projektionen von $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ und von $A_0 A''_1 \dots A''_{n-1}$ auf Σ' in diesem Raume kongruent sind. Wenn wir uns nun einen durch den Mittelpunkt von $A_0 A'_0$ gehenden $(n-1)$ -dimensionalen linearen Raum Σ parallel zu Σ' denken, so hat Σ zum ersten die Eigenschaft, dass die Projektionen von $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ und von $A'_0 A'_1 \dots A'_{n-1}$ auf Σ durch eine Bewegung in Σ zur Deckung gebracht werden können und weiter, dass die Abstände der Punkte A_0 und A'_0 , der Punkte A_1 und A'_1, \dots und der Punkte A_{n-1} und A'_{n-1} zu Σ jedesmal einander entgegengesetzt und gleich sind. Wir wenden nun auf

$A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ die Bewegung im Raume R_n an, welche die Projektion von $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ auf Σ in jene von $A'_0 A'_1 \dots A'_{n-1}$ auf Σ transformiert und Σ unverändert lässt, also parallel zu Σ ist. Nun sind das Simplex $A'_0 A'_1 \dots A'_{n-1}$ und das Simplex $\bar{A}_0 \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-1}$, das durch die genannte Bewegung aus $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ entsteht, einanders Spiegelbilder für Σ .

Hiermit ist der Satz für einen linearen Raum R_n bewiesen.

Wir haben eine besondere Umlegung, wenn es mehrere Räume Σ' und also auch Σ gibt. Wenn wir p linear unabhängige Räume Σ finden, so sind die Abstände zugeordneter Punkte zum Durchschnittsraum R_{n-p} einander entgegengesetzt und gleich und die orthogonalen Projektionen zugeordneter Gebilde auf den Raum R_{n-p} sind in diesem Raume entweder kongruent oder symmetrisch, da der Abstand der Projektionen zweier Punkte auf den Raum R_{n-p} gleich ist dem Abstände der Projektionen der in der Umlegung zugeordneten Punkte.

Im Falle der Kongruenz können wir die Umlegung durch eine Bewegung, die dem Raume R_{n-p} parallel ist, in eine Spiegelung an diesem Raume transformieren. Nun giebt die Zusammensetzung einer Spiegelung an einem Raume R_{n-p} und einer Bewegung nur eine Umlegung, wenn p ungerade ist. Wenn die Projektionen zugeordneter Gebilde auf den Raum R_{n-p} in diesem Raume symmetrisch sind, so haben wir in R_{n-p} eine Umlegung, die erzeugt werden kann von einer Bewegung, die einem Raume R_{n-p-1} des Raumes R_{n-p} parallel ist und von einer Spiegelung an diesem Raume R_{n-p-1} . Die gegebene Umlegung besteht dann aus einer Bewegung, die dem Raume R_{n-p-1} parallel ist und aus einer Spiegelung an diesem Raume. Wir bekommen so nur eine Umlegung, wenn p gerade ist; dann giebt es aber $p+1$ linear unabhängige Räume Σ .

Eine Umlegung im Raume R_n kann also erzeugt werden von einer Bewegung parallel zu einem Raume R_{n-p} und von einer Spiegelung an diesem Raume; hier ist p ungerade. Wenn p den höchstmöglichen (offenbar ungeraden) Wert hat, so ist der Raum R_{n-p} der Ort der Mittelpunkte der Paare in der Umlegung zugeordneter Punkte.

§ 4. Ein analytischer Beweis des im Anfang dieser Mitteilung genannten Satzes kann leicht gegeben werden mit Hilfe der Eigenschaft, dass man, wenn man in einer orthogonalen Determinante mit dem Werte -1 die Elemente der Hauptdiagonale um eins vermehrt, eine Determinante bekommt, die gleich null ist. Diese Eigenschaft kann umgekehrt aus unseren geometrischen Betrachtungen erschlossen werden, ja so finden wir sogar dass der Rang der letztgenannten Determinante $n-p$ ist, worin p nur ungerade sein kann.

Mathematics. — *Sur l'itération et sur la fonction de KÖNIGS.* Par J. WOLFF (Utrecht). (Communicated by J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

La présente note complétera quelques résultats obtenus par M. G. VALIRON dans son article „Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan”.¹⁾

1. Commençons par simplifier la déduction d'un des théorèmes obtenus par cet auteur.

Soit $f(z) = f(x + yi) = u + vi$ holomorphe dans le demi-plan $D(x > 0)$ et soit $u > 0$.

On sait que pour z infini, $\frac{y}{x}$ borné, $\frac{f(z)}{z}$ tend vers une limite $\lambda \equiv 0^2)$, appelée „dérivée angulaire de f à l'infini.”

Nous supposons dorénavant que $\lambda > 1$.

Posons $f(z) = z_1 = x_1 + y_1 i$, $f(z_1) = z_2 = x_2 + y_2 i$, etc.

L'expression

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}{(x_{n+1} + x_n)^2 + (y_{n+1} + y_n)^2}$$

ne croît jamais lorsque n croît. Soit μ sa limite pour $n \rightarrow \infty$. Alors

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{x_n x_{n+1}} \rightarrow \frac{2(1+\mu)}{1-\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Puisque $\frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} \geq 2$, il en résulte que les nombres

$$\frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{x_n x_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

sont bornés. Et puisque $x_{n+1} > x_n$ les nombres $\frac{|y_{n+1} - y_n|}{x_{n+1}}$ sont bornés aussi. Donc, il existe un nombre M , indépendant de n , tel que

$$|y_n - y| \leq \sum_1^n |y_k - y_{k-1}| < M \sum_1^n x_k.$$

Les inégalités $x_{k+1} \geq \lambda x_k$, $\lambda > 1$ donnent

$$|y_n - y| < M x_n \sum_1^n \lambda^{-(n-k)} < \frac{M\lambda}{\lambda-1} x_n$$

¹⁾ Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, LV, Avril 1931.

²⁾ Comptes rendus, 13 Sept. 1926 p. 501.

Il en suit que $\frac{y_n}{x_n}$ est borné. De (1) il résulte maintenant que

$$\frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{x_n x_{n+1}} \rightarrow \frac{2(1+\mu)}{1-\mu} - \lambda - \frac{1}{\lambda} = A$$

En tenant compte de

$$y_{n+1} = \lambda y_n + o(x_n), \quad x_{n+1} = \lambda x_n + o(x_n)$$

il vient

$$\frac{y_n^2}{x_n^2} \rightarrow \frac{A\lambda}{(\lambda-1)^2} = k^2$$

Posons

$$z_n = r_n e^{i\varphi_n(z)}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_n(z) < \frac{\pi}{2}.$$

Si $k = 0$, $\varphi_n(z) \rightarrow 0$.

Si $k \neq 0$, on a $y_{n+1} = \lambda y_n + o(y_n)$, donc $|y_n|$ finit par croître. Donc dans tous les cas $\varphi_n(z)$ a une limite unique $\varphi(z)$ pour n infini, différente de $+\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$.

Considérons les itérés a_n et z_n de deux points a et z de D . Indiquons par un accent l'image d'un point par rapport à l'axe imaginaire. L'expression $\left| \frac{z_n - a_n}{z_n - a'_n} \right|$ ne croît jamais lorsque n croît et sa limite L satisfait à $0 \leq L < 1$.

Les a_n et les z_n restant dans un angle fixe $-\frac{\pi}{2} + h < \varphi < \frac{\pi}{2} - h$, où $h > 0$, on conclut que $\left| \frac{z_n}{a_n} \right|$ reste entre deux nombres positifs et fixes.

Les fonctions $\frac{z_n}{a_n}$ de z , holomorphes dans D , forment une suite normale, car elles ne prennent pas de valeurs négatives.

Acceptons maintenant pour un instant que la fonction $\varphi(z) = \lim \varphi_n(z)$ trouvée plus haut serait une constante. Alors il existe une suite $p \rightarrow \infty$ d'entiers telle que $\frac{z_p}{a_p}$ tend vers une constante positive $c < \infty$. On aurait

$\frac{z_{p+1}}{a_p} \rightarrow c$, en contradiction avec $\frac{z_{p+1}}{z_p} \rightarrow \lambda > 1$. Nous retrouvons ainsi le

THÉORÈME I (M. VALIRON): $\varphi_n(z)$ tend vers une fonction harmonique non constante ¹⁾.

¹⁾ J'avais obtenu un résultat plus faible dans un article portant le même nom que celui de M. VALIRON cité ci-dessus. (Bulletin de la Société Math. de France, T. 57, 1929, p. 195.)

2. En même temps nous trouvons que $\frac{z_n}{a_n}$ tend vers une fonction holomorphe dans D . En effet, s'il y avait deux fonctions limites, leur quotient aurait son argument nul partout, donc ce quotient serait une constante positive $c \neq 1$.

En prenant $z = a$ on aboutit à la contradiction $1 = c$.

De même $\left| \frac{z_n}{a_n} \right|$ tend vers une fonction $K(z)$ holomorphe dans D et ayant sa partie réelle positive, $K(z)$ est une fonction de KÖNIGS, agrégée à $f(z)$, satisfaisant à l'équation de SCHRÖDER

$$K(z_1) = \lambda K(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3. THÉORÈME II (DE M. VALIRON, un peu complété).¹⁾

Si $f(z)$ possède une fonction de KÖNIGS $K(z)$ holomorphe dans D et dont toutes les valeurs sont dans D , et si la dérivée angulaire γ de $K(z)$ à l'infini est positive, alors toute fonction $k(z)$ holomorphe dans D , dont toutes les valeurs sont dans D et qui satisfait à l'équation (2), comme $K(z)$, ne diffère de $K(z)$ que par un facteur constant et positif.

En effet: soit δ la dérivée angulaire de $k(z)$ à l'infini. Pour $z \rightarrow \infty$, $\frac{y}{x}$ borné on a $\frac{K(z)}{z} \rightarrow \gamma$, $\frac{k(z)}{z} \rightarrow \delta$, donc $\frac{K(z)}{k(z)} \rightarrow$ limite finie positive ou infinie.

La fonction $K(z)$ est univalente dans une partie Δ de D , contenant des domaines $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $|z| > R$, où ε est aussi petit qu'on le veut.

Indiquons par Δ_1 le domaine lieu de $K(z)$ pour z dans Δ . Posons $\frac{K(z)}{k(z)} = \psi(\zeta)$, alors $\psi(\zeta)$ est holomorphe dans Δ_1 . On a

$$\psi(\lambda \zeta) = \frac{K(z_1)}{k(z_1)} = \frac{\lambda K(z)}{\lambda k(z)} = \psi(\zeta).$$

Si le quotient $\frac{K(z)}{k(z)}$ n'était pas constante, $\psi(\zeta)$ serait une fonction holomorphe non constante dans Δ_1 , ayant la propriété que $\psi(\lambda \zeta) = \psi(\zeta)$. Par conséquent pour ζ infini $\psi(\zeta)$ n'aurait pas une limite angulaire unique, en contradiction avec ce que nous venons de trouver.

4. Posons $f(z) = \lambda z + \omega(z)$, alors $\omega(z)$ a sa partie réelle positive dans D .

THÉORÈME III. La série $\sum \left| \frac{\omega(z_n)}{(z_n)} \right|$ est partout convergente ou partout divergente.

¹⁾ M. VALIRON suppose que la dérivée angulaire de $k(z)$ à l'infini soit positive.

En effet, soit a un point de convergence et posons

$$\zeta = \frac{z-a}{z-a'}, \quad \tau = \frac{\omega(z_n) - \omega(a_n)}{\omega(z_n) - \{\omega(a_n)\}'}$$

Alors τ est une fonction holomorphe de ζ pour $|\zeta| < 1$ et on a $|\tau| < 1$, donc $|\tau| \leq |\zeta|$, c'est à dire

$$\left| \frac{\omega(z_n) - \omega(a_n)}{\omega(z_n) - \{\omega(a_n)\}'} \right| \leq \left| \frac{z-a}{z-a'} \right|$$

Donc $\left| \frac{\omega(z_n)}{\omega(a_n)} \right|$ est, comme $\left| \frac{z_n}{a_n} \right|$ entre deux nombres positifs ne dépendant que de a et de z , d'où le théorème.

5. THÉORÈME IV. Si $f(z)$ admet une fonction $K(z)$ de KÖNIGS, à dérivée angulaire positive γ à l'infini, la série $\sum \frac{\mathcal{R} \omega(z_n)}{x_n}$ converge dans D et inversement.

En effet

$$\frac{z_n}{\lambda^n} = \frac{z_n K(z)}{K(z_n)} \rightarrow \frac{K(z)}{\gamma}.$$

Remarquons en passant que $\lim \frac{z_n}{\lambda^n}$ est une fonction de KÖNIGS dont la dérivée angulaire à l'infini égale 1.

En tenant compte de $x_{k+1} = \lambda x_k + \mathcal{R} \{\omega(z_k)\}$ on trouve

$$\frac{x_n}{\lambda^n} = \prod_0^n \left(1 + \frac{\mathcal{R} \omega(z_k)}{\lambda x_k} \right) \dots \dots \dots (3)$$

Le premier membre tendant vers une limite finie, la première partie est démontrée.

Inversement, si la série $\sum \frac{\mathcal{R} \omega(z_n)}{x_n}$ converge en un point z de D , la relation (3) apprend que la suite croissante des fonctions harmoniques $\frac{x_n}{\lambda^n}$ dans D converge en un point. Elle converge donc dans D . Et parceque $\frac{z_n}{x_n}$ tend partout vers une limite, $\frac{z_n}{\lambda^n}$ tend dans D vers une fonction holomorphe $K(z)$ à partie réelle positive.

Parceque $x_n \geq \lambda^n x$, on a $\left| \frac{z_n}{\lambda^n z} \right| \leq \frac{x}{|z|}$ donc en passant à la limite $n \rightarrow \infty$ $\left| \frac{K(z)}{z} \right| \leq \frac{x}{|z|}$ et en passant maintenant à la limite angulaire $z \rightarrow \infty$, nous trouvons que la dérivée angulaire de $K(z)$ à l'infini est positive, donc égale à 1, en vertu de ce que nous trouvons ci-dessus.

6. THÉORÈME V.

La convergence de $\sum \frac{\Re \omega(z_n)}{x_n}$ entraîne celle de $\sum \left| \frac{\omega(z_n)}{z_n} \right|$.

En effet: supposons la première série convergente. On a dans D

$$\left| \frac{d\omega(z_k)}{dz} \right| \leq \frac{\Re \omega(z_k)}{x}, \text{ donc pour } k=0, 1, 2, \dots$$

$$|\omega(z_{k+1}) - \omega(z_k)| < M \int_z^{z_1} \Re \omega(t_k) |dt|,$$

où M ne dépend pas de k . Par conséquent

$$|\omega(z_n) - \omega(z)| < M \int_z^{z_1} \sum_0^{n-1} \Re \omega(t_k) |dt|.$$

En vertu de $|z_n| \equiv \lambda^n x$, il suffira de démontrer la convergence de $\sum \left| \frac{\omega(z_n)}{\lambda^n} \right|$. Or

$$\left| \frac{\omega(z_n)}{\lambda^n} \right| < \left| \frac{\omega(z)}{\lambda^n} \right| + \frac{M}{\lambda^n} \int_z^{z_1} \sum_0^{n-1} \Re \omega(t_k) |dt|,$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \left| \frac{\omega(z_n)}{\lambda^n} \right| &< \left| \frac{\omega(z)}{\lambda-1} \right| + M \int_z^{z_1} \sum_{m=0}^\infty (\lambda^{-m-1} + \lambda^{-m-2} + \dots) \Re \omega(t_m) |dt| = \\ &= \left| \frac{\omega(z)}{\lambda-1} \right| + \frac{M}{\lambda-1} \int_z^{z_1} \sum_{m=0}^\infty \frac{\Re \omega(t_m)}{\lambda^m} |dt|. \end{aligned}$$

La convergence de $\sum \frac{\Re \omega(z_n)}{x_n}$ ayant pour conséquence que $\frac{x_m}{\lambda^m}$ tend vers une limite finie (§ 5), uniformément sur le segment $z z_1$, la série sous la dernière intégrale converge uniformément sur ce segment, parce que ses termes sont harmoniques et positifs, ce qui démontre le théorème.

Mathematics. — *Die linearen Komplexe in der nicht-Euklidischen Geometrie.* I. Von O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

I. Klassifikation der Komplexe.

1. Wir untersuchen im Folgenden die projektiven Eigenschaften derjenigen Figur im $(2n-1)$ -dimensionalen Raum R_{2n-1} , welche aus einer quadratischen Varietät Q , und einem linearen Komplex L zusammengesetzt ist.

Q habe den maximalen Rang $2n$; sie kann also als die absolute Varietät einer CAYLEY-Metrik betrachtet werden. Wir können dann die Eigenschaften der Figur (Q, L) , wenigstens unter gewissen Realitätsbedingungen, auffassen als die nicht-Euklidischen Eigenschaften eines linearen Komplexes. Die Realitätsfragen werden vorläufig ausser Acht gelassen. Es bleibt also ausserdem dahingestellt ob wir mit der elliptischen oder mit der hyperbolischen Geometrie zu tun haben. Wir wenden aber dann und wann die Terminologie der nicht-Euklidischen Geometrie an, nennen also im Besondern eine Kollineation, welche Q (direkt) invariant lässt, eine Bewegung.

Den linearen Komplex L definieren wir mittels des kovarianten Nullsystems, also mittels einer Korrelation mit schief-symmetrischer Matrix, N .

Wir setzen $m = 2n$; die Punktkoordinaten sind x_1, x_2, \dots, x_m , die dualen R_{m-2} -Koordinaten U_1, U_2, \dots, U_m .

Die Korrelation N wird dann dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= p_{12} x_2 + p_{13} x_3 + \dots + p_{1m} x_m \\ U_2 &= p_{21} x_1 + p_{23} x_3 + \dots + p_{2m} x_m \\ &\vdots \\ U_m &= p_{m1} x_1 + p_{m2} x_2 + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (1,1)$$

mit $p_{ij} = -p_{ji}$.

Wir setzen voraus, dass die Determinante der Korrelation ungleich Null ist. Spezielle lineare Komplexe sind damit ausgeschlossen.

2. Mit der quadratischen Varietät Q ist eine Polkorrelation P kovariant verbunden. Wir multiplizieren sie mit der L zugeordneten Nullkorrelation N . Es entsteht dann eine Kollineation

$$C = PN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2,1)$$

welche wir als *Produktkollineation* bezeichnen.

Aus der Äquivalenz von C_1 und C_2 haben wir somit die Existenz einer Kollineation O abgeleitet, welche Q in Q , L_2 in L_1 überführt¹⁾.

Diese Äquivalenz ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig. Aus

$$P_1 = O P_2 O^{-1} \quad \text{und} \quad N_1 = O N_2 O^{-1}$$

geht nämlich hervor

$$C_1 = P_1 N_1 = O P_2 O^{-1} O N_2 O^{-1} = O P_2 N_2 O^{-1} = O C_2 O^{-1}.$$

3. Um die Figuren (Q, L) zu klassifizieren, ist es also hinreichend die Kollineationen $C = PN$ zu klassifizieren. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von Kollineationen ist die Übereinstimmung des Systems von Elementarteilern ihrer charakteristischen Matrices.

Es zeigt sich nun, dass die Kollineationen C nicht die allgemeinen sind, sondern dass sie gewissen Bedingungen genügen.

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass Q die Gleichung (2, 2) erhält und C also durch (2, 3) dargestellt wird. Schreibt man die charakteristische Gleichung von C nieder, dadurch dass man die Determinante der Matrix $C - \lambda I$ gleich Null stellt, so verschwinden die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von λ , da eine schiefe-symmetrische Determinante ungerader Ordnung immer gleich Null ist. Daraus schliesst man:

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer Produktkollineation sind je zwei und zwei einander entgegengesetzt²⁾.

Für die projektiven Eigenschaften von C sind nicht nur die Linearfaktoren der charakteristischen Determinante von Bedeutung, sondern auch die grössten gemeinsamen Teiler ihrer Minoren.

Der Minor eines Elementes der Hauptdiagonale hat die Form

$$-\lambda^{m-1} + q_1 \lambda^{m-3} \dots + q_{n-1} \lambda,$$

enthält er den Faktor $(\lambda - a)$, dann kommt auch der Faktor $(\lambda + a)$ vor. Es zeigt sich weiter aus einer Betrachtung der Matrix, dass der Minor von a_{ij} ($i \neq j$) dadurch erhalten wird, dass man in dem transponierten Minor von a_{ji} die Zahlen p_{ij} durch p_{ji} ersetzt. Den mit -1 multiplizierten Minor von a_{ij} findet man, indem in dem Minor von a_{ji} $-\lambda$ statt λ geschrieben wird. Für die Minoren niedrigeren Grades gilt Analoges, woraus man schliesst:

Enthält der grösste gemeinsame Teiler der k -ten Minoren ($k = 0, 1, \dots, m-1$) der Matrix $C - \lambda I$ den Faktor $\lambda - a$, dann enthält er auch den Faktor $\lambda + a$.

¹⁾ Dieser Beweis ist dem üblichen des Satzes über die Äquivalenz *symmetrischer* Matrices völlig analog. Vgl. BÖCHER, Einführung in die höhere Algebra, S. 323.

BARRAU, Analytische Meetkunde II, pg. 241.

²⁾ Keine dieser Wurzeln ist Null, da nach unsrer Voraussetzung P und N , also auch C nicht-singulär sind.

Hat die charakteristische Gleichung von C die Wurzel a p -fach, und sind die der Wurzel gehörigen Elementarteiler bzw.:

$$(\lambda - a)^p, (\lambda - a)^{p-e_1}, (\lambda - a)^{p-e_1-e_2}, \dots, (\lambda - a)^{p-e_1-\dots-e_k},$$

dann hat sie auch die Wurzel $-a$, und die Elementarteiler derselben sind:

$$(\lambda + a)^p, (\lambda + a)^{p-e_1}, (\lambda + a)^{p-e_1-e_2}, \dots, (\lambda + a)^{p-e_1-\dots-e_k}.$$

Bezeichnet man den Typus einer Kollineation mittels der Segreschen Notation, wo das Verhalten der Wurzel a durch das Symbol $(e_1 e_2 \dots e_k)$ angedeutet wird, dann gehört zur Wurzel $-a$ genau dasselbe Symbol. Eine Produktkollineation gehört immer einem Kollineationstypus an, dessen Segre-Symbol in zwei gleiche Teile zu spalten ist. Die Anzahl nicht ausgeschlossener Typen ist offenbar der Anzahl Segre-Symbole in n Variabeln gleich.

Beispiel. Für $n=2$, sind Typen wie $[2 \ 11]$, $[3 \ 1]$, $[(2 \ 1)1]$ u.s.w. ausgeschlossen. Es bleiben nur drei Typen übrig: $[11 \ 11]$, $[2 \ 2]$, $[(11)(11)]$.

4. Wir wollen jetzt nachweisen, dass die nicht-ausgeschlossenen Typen sämtlich vorkommen.

Wir wählen dazu ein anders Koordinatensystem und zwar ein solches, wobei Q in den Punktkoordinaten $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_1\}$ die Gleichung

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0 \quad (4,1)$$

erhält.

Sind $\{U_1, U_2, \dots, U_n, V_n, V_{n-1}, \dots, V_1\}$ die dualen R_{n-2} Koordinaten, dann wird die Polkorrelation P dargestellt durch:

$$\left. \begin{array}{ll} U_1 = y_1 & , \quad V_1 = x_1 \\ U_2 = y_2 & , \quad V_2 = x_2 \\ \dots & \dots \\ U_n = y_n & , \quad V_n = x_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4,2)$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen p_{ij} mit i, j dann ist die zu L gehörige Nullkorrelation:

$$\left. \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_n & y_n & y_{n-1} & \dots & y_1 \\ U_1 & 0 & 1,2 & \dots & 1,n & 1,n+1 & 1,n+2 & \dots & 1,2n \\ U_2 & 2,1 & 0 & \dots & 2,n & 2,n+1 & 2,n+2 & \dots & 2,2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n & n,1 & n,2 & \dots & 0 & n,n+1 & n,n+2 & \dots & n,2n \\ V_n & n+1,1 & n+1,2 & \dots & n+1,n & 0 & n+1,n+2 & \dots & n+1,2n \\ V_{n-1} & n+2,1 & n+2,2 & \dots & n+2,n & n+2,n+1 & 0 & \dots & n+2,2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_1 & 2n,1 & 2n,2 & \dots & 2n,n & 2n,n+1 & 2n,n+2 & \dots & 0 \end{array} \right\} \quad (4,3)$$

Für die Produktkollineation finden wir dann:

$$\left. \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{cccc}
 x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
 x'_1 & 2n, 1 & 2n, 2 & \dots & 2n, n \\
 x'_2 & 2n-1, 1 & 2n-1, 2 & \dots & 2n-1, n \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x'_n & n+1, 1 & n+1, 2 & \dots & n+1, n \\
 \hline
 y'_n & n, 1 & n, 2 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 y'_1 & 0 & 1, 2 & \dots & 1, n
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc}
 y_n & \dots & y_1 \\
 2n, n+1 & \dots & 0 \\
 2n-1, n+1 & \dots & 2n-1, 2n \\
 \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & n+1, 2n \\
 \hline
 n, n+1 & \dots & n, 2n \\
 \dots & \dots & \dots \\
 1, n+1 & \dots & 1, 2n
 \end{array}
 \end{array} \right\} (4,4)$$

Um zu zeigen, dass sämtliche nicht durch die vorhergehenden Sätze ausgeschlossenen Typen darin vorkommen, setzen wir

$$\left. \begin{array}{l}
 i, j = 0 \quad , \quad \text{wenn } i > n, j > n \\
 i, j = 0 \quad , \quad \text{wenn } i \leq n, j \leq n \\
 i, j = a_{2n+1-i, j} \quad , \quad \text{wenn } i > n, j \leq n \\
 i, j = a_{i, 2n+1-j} \quad , \quad \text{wenn } i \leq n, j > n
 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4,5)$$

Man hat dann

$$\begin{array}{cccc}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
 x'_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 x'_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x'_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cccc}
 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\
 y'_1 & -a_{11} & -a_{21} & \dots & -a_{n1} \\
 y'_2 & -a_{12} & -a_{22} & \dots & -a_{n2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 y'_n & -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & -a_{nn}
 \end{array}$$

wo a_{ij} willkürliche Zahlen sind. Durch unsre besondere Wahl der Koeffizienten haben wir erreicht, dass durch die Produktkollineation C die Koordinaten x_i und auch die Koordinaten y_i getrennt transformiert werden. Die Matrix der x_i -Transformation nennen wir C_1 , die der y_i -Transformation C_2 . Man hat offenbar

$$C_2 = -C'_1 \dots \dots \dots (4,7)$$

C_1 ist die allgemeine lineare Transformation in n Variabeln; C_1 und C_2 sind nicht-singulier, weil C nicht-singulier ist. Das SEGRE-symbol von C_1 stimmt mit dem von C_2 überein; sie bilden zusammen das Symbol für C . Durch geeignete Wahl der Koeffizienten a_{ij} kann man jeden Kollineationstypus in n Variabeln erhalten.

Die Elementarteilertheorie setzt uns instand für jede Kollineation mit vorgeschriebenen Elementarteilern eine Normalform anzugeben. Das heisst also, dass wir die Figur (Q, L) mittels projektiver Transformationen, oder auch einen linearen Komplex mittels nicht-Euklidischer Bewegungstransformationen auf eine kanonische Form bringen können. Wir wollen die allgemeinste Normalform hier nicht hinschreiben, sondern weisen in diesem Zusammenhang auf die bekannten Darstellungen der Elementarteilertheorie¹⁾ und auf die unten behandelten Beispielen hin. Wir möchten aber schon hier die Bemerkung machen, dass diese Normalform, wenigstens im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist. Hat z.B. die Determinante der Kollineation C die Faktoren $(\lambda - a)^p (\lambda - b)^q$, und also auch die Faktoren $(\lambda + a)^p (\lambda + b)^q$, so kann man die Koordinaten x_i und y_i insoweit noch willkürlich wählen, dass man der Determinante von C_1 bzw. die Faktoren $(\lambda - a)^p (\lambda - b)^q, (\lambda - a)^p, (\lambda + b)^q, (\lambda + a)^p (\lambda - b)^q$ oder $(\lambda + a)^p (\lambda + b)^q$ zuteilen kann, und der von C_2 jedesmal die übrigen. Zudem sind noch die Indizes der x_i (wenigstens wenn nicht alle Linearfaktoren von C_1 einander gleich sind) gewisser Permutationen fähig, welche dann, der Relation (4, 7) wegen, analoge Permutationen der y_i nach sich ziehen.

Die kanonische Form ist also nur bis auf eine endliche Transformationsgruppe (welche vom Kollineationstypus abhängt) bestimmt. Wir setzen aber fest dass in unsren kanonischen Formen die Linearfaktoren welche bzw. zu C_1 und C_2 gehören verschieden sind, was immer eventuell nach einer gewissen Permutation von $x_1 x_2 \dots x_n y_n \dots y_1$ erreicht werden kann. Hat die charakteristische Gleichung von C $2p$ verschiedene Wurzeln ($1 \leq p \leq n$), dann lässt C offenbar $2^p \cdot p!$ verschiedene kanonische Darstellungen zu.

II. Metrische Kovarianten des Komplexes.

5. Die Deckfigur der Produktkollineation C bildet offenbar eine *nicht-Euklidische metrische Kovariante* des linearen Komplexes.

Wir fangen mit den *Deckpunkten* an. C ist das Produkt einer Nullkorrelation und einer Polkorrelation; in der ersten sind Punkt und zugeordneter R_{m-2} immer inzident. Ein Deckpunkt von C ist also ein solcher, dessen Polraum mit dem Punkt selbst inzident ist.

Die Deckpunkte von C liegen sämtlich auf Q ; in diesen Punkten fällt der Nullraum mit dem Tangentialraum an Q zusammen.

¹⁾ BÖCHER, l.c. S. 311, u. s. w.

BARRAU, l.c. pg. 441.

Diese Räume bilden die Deck- R_{m-2} der Kollineation C .

Um die Deckpunkte von C analytisch zu bestimmen, müssen die Gleichungen

$$\lambda \cdot \{x\} = C_1 \cdot \{x\} \quad , \quad \lambda \cdot \{y\} = C_2 \cdot \{y\} \quad . \quad . \quad . \quad (5,1)$$

(wie wir sie kurz bezeichnen können), gelöst werden.

Für λ muss man dafür beziehungsweise die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von C substituieren. Nimmt man eine zu C_1 gehörige Wurzel (welche nach unsrer Voraussetzung von jeder Wurzel von C_2 verschieden ist), so genügt dem zweiten Gleichungssystem (5,1,) nur die Nulllösung; und umgekehrt. Die Deckpunkte genügen also einem der Gleichungssysteme:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = y_2 = y_3 = \dots y_n = 0 \\ x_1 = x_2 = x_3 = \dots x_n = 0 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5,2)$$

Jedes stellt aber einen Raum $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension R_{n-1} dar, welcher ganz auf Q gelegen ist. Wir bezeichnen sie bzw. mit W_1 und W_2 ¹⁾.

Der dualistische Satz sagt aus, dass jeder Deck- R_{m-1} eine der Varietäten W_1 oder W_2 enthält.

Aus demjenigen, was wir am Ende von (4) gesagt haben, geht hervor, dass die Varietäten W_1 und W_2 nicht immer eindeutig sind. Hat die charakteristische Gleichung von C $2p$ verschiedene Wurzeln, dann gibt es 2^{p-1} Möglichkeiten für das Varietätenpaar (W_1, W_2) .

6. Die Kollineation C induziert in W_1 bzw. W_2 die Kollineationen C_1 und C_2 . Zwischen C_1 und C_2 gibt es die Relation (4, 7): $C_2 = -C'_1$. Die mit der Punktkollineation C_1 duale R_{n-2} -Transformation wird dargestellt durch die kontragrediente Matrix $(C'_1)^{-1}$; eine Kollineation und ihre Inverse haben dieselbe Deckfigur. Daraus geht hervor:

Liegt in W_1 ein Deckraum R_k ($0 \leq k \leq n-1$) so liegt in W_2 ein Deckraum R_{n-k-2} mit gleichen Koordinaten.

Im Besondern ist jedem Deckpunkt P mit Koordinaten $x_i = a_i$ in W_1 ein Deck- R_{n-2} in W_2 zugeordnet, V_p welcher die Gleichung

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots a_n y_n = 0$$

hat. Jeder Punkt in V_p ist aber, wie aus dieser Gleichung hervorgeht, konjugiert mit P hinsichtlich Q . Das heisst:

Der R_{m-1} , welcher den in W_1 gelegenen Deckpunkt P mit dem zugeordneten $(n-2)$ -dimensionalen Deckraum V_p in W_2 verbindet, liegt auf Q .

¹⁾ W_1 und W_2 sind lineare Räume auf Q , welche keinen Punkt gemeinsam haben. Sie gehören demselben System oder verschiedenen Systemen an, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Vgl. BARRAU l.c. pg. 380.

Die Gleichungen des R_{n-1} sind in unsrem Falle ¹⁾

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} \dots \dots \dots (6,1)$$

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = 0.$$

Bekannte Sätze ²⁾ über auf Q gelegene lineare Räume sagen aus, dass dieser R_{n-1} der einzige ist, welcher durch $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ in W_1 geht und W_2 in einem R_{n-2} schneidet. Die Verwandtschaft zwischen den dualen Deckfiguren in W_1 und W_2 ist dadurch auch geometrisch gedeutet.

Der eben hingeschriebene Satz lässt sich leicht erweitern:

Der R_{n-1} , welcher einen in W_1 gelegen Deckraum R_k mit dem zugeordneten Deck- R_{n-k-2} in W_2 verbindet, liegt auf Q .

Damit ist das Verhältnis zwischen den in W_1 und W_2 gelegenen Deckfiguren völlig aufgeklärt. Welcher Natur diese Deckfiguren sind, hängt vom Typus des linearen Komplexes ab. Jede Deckpunktfigur in n Variablen kann vorkommen.

7. Im allgemeinen ist ein Deck- R_k von C ein Raum, dem durch N und durch P derselbe R_{2n-k-2} zugeordnet ist. In nicht-Euklidischer Sprache heisst das also: R_k wird durch den linearen Komplex gerade der absolut senkrechte Raum R_{2n-k-2} zugeordnet.

Einen R_k dem der lineare Komplex einen inzidenten R_{2n-k-2} zuordnet, nennt man bekanntlich einen *Leitraum* des Komplexes.

Daraus geht im Besondern der Satz hervor:

Die auf Q gelegenen Deck- R_{n-1} der Kollineation C bilden die Figur, welche die Mannigfaltigkeit der Leit- R_{n-1} des linearen Komplexes gemeinsam hat mit derjenigen der auf Q gelegenen R_{n-1} . Diese Mannigfaltigkeiten haben bzw. die Dimensionen $\frac{1}{2}n(n+1)$ und $\frac{1}{2}n(n-1)$; die Dimension der Mannigfaltigkeit sämtlicher R_{n-1} in R_{2n-1} beträgt n^2 . Im allgemeinen kann man also erwarten, dass die Mannigfaltigkeiten eine endliche Anzahl gemeinsamer Elemente haben. Die Anzahl hängt vom Typus des Komplexes ab, beträgt für den Komplex des allgemeinen Typus 2^n .

8. Jede (nicht auf Q gelegene) Deckgerade der Produktkollineation nennen wir eine (eigentliche) *Achse*. Eine Achse steht demnach absolut senkrecht zu dem durch den linearen Komplex zugeordneten R_{2n-2} . In W_1 und W_2 liegt eine gewisse Anzahl uneigentlicher Achsen; auch die Achsen, welche man erhält als Verbindungsgeraden eines in W_1 und eines in W_2 gelegenen Punktes sind, den Sätzen des (6) zufolge, zum Teil uneigentlich. Die Anzahl der Achsen hängt vom Typus ab. Es gibt lineare

¹⁾ Er. gehört demselben System an wie W_1 , wenn n eine ungerade Zahl ist. Vgl. Fussnote, p. 8 *M* (?).

²⁾ BARRAU, l.c. pg. 379.

metrischen Invarianten des Komplexes auf besondere Weise spezialisiert sind, was wir wenigstens vorläufig ausser Acht lassen. Wir nehmen vorerst $\kappa = 1$.

Man hat dann

$$CB = BC \dots \dots \dots (9,5)$$

Die Bewegungstransformationen dieser Art sind also mit der Produktkollineation vertauschbar.

Nun ist C eine Kollineation, wobei die Koordinaten x und y getrennt bleiben, während die charakteristischen Gleichung der x -Transformation C_1 und die der y -Transformation C_2 keine gemeinsamen Wurzeln haben. Unter diesen Umständen muss eine mit C vertauschbare Kollineation eine solche sein, welche die Koordinaten x und y jede für sich transformiert¹⁾. Das heisst also, dass die Gebilde W_1 und W_2 diesen Bewegungen gegenüber invariant sind.

Die Bewegung B kann also betrachtet werden als die Zusammensetzung einer x -Transformation B_1 , und einer y -Transformation B_2 . Da die Gleichung

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n = 0$$

invariant bleiben soll, werden x und y kontragredient transformiert. Man hat also

$$B_2 = \varrho \cdot (B'_1)^{-1} \dots \dots \dots (9,6)$$

B_1 genügt einer Gleichung

$$\kappa_1 C_1 = B_1 C_1 B_1^{-1}$$

Eine Lösung mit $\kappa \neq 1$ lassen wir ausser Acht (die Lösung $\kappa = -1$ ist ausgeschlossen), so dass

$$C_1 = B_1 C_1 B_1^{-1} \dots \dots \dots (9,7)$$

Weiter hat man in derselben Weise

$$C_2 = B_2 C_2 B_2^{-1} \dots \dots \dots (9,8)$$

Letztere Bedingung ist aber eine Folgerung der vorigen. Aus (9,7) geht nämlich hervor

$$C'_1 = (B'_1)^{-1} C'_1 B'_1 \dots \dots$$

oder (4,7) zufolge

$$-C_2 = (B'_1)^{-1} \cdot -C_2 \cdot B'_1$$

d.h.

$$C_2 = \varrho^{-1} B_2 C_2 \varrho B_2^{-1}$$

¹⁾ VOSS, Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen, Münch. Sitzungsber., Bnd. XIX (1889), S. 283.

also

$$C_2 = B_2 C_2 B_2^{-1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (9,8)$$

Man erhält die Lösungen der Gleichung (9,5) indem man für B eine Zusammensetzung einer x -Transformation B_1 und einer y -Transformation B_2 nimmt, so dass

$$C_1 B_1 = B_1 C_1$$

und

$$B_2 = \varrho (B_1^{-1})^{-1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (9,9)$$

10. Das Problem ist also zurückgeführt auf die Bestimmung der mit der allgemeinen Matrix n -ter Ordnung C_1 vertauschbaren Matrizes. Die vollständige Lösung dieser Frage findet man bei VOSS¹⁾.

Haben die Minoren $(n-i)$ -ter Ordnung der charakteristischen Matrix von C_1 einen grössten gemeinsamen Teiler n_i -ter Ordnung, so bilden die mit C_1 vertauschbaren Matrizes eine Gruppe welche

$$N = n + 2(n_1 + n_2 + \dots) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10,1)$$

homogene Parameter enthält und deren allgemeines Element nach einem von VOSS gegebenen Verfahren leicht hingeschrieben werden kann, wenn C_1 in der WEIERSTRASZSCHEN Normalform gegeben ist.

Hat die charakteristische Gleichung von C_1 die Wurzeln λ_i je p_i -fach, und sind die zu λ_i gehörigen Elementarteiler $(\lambda - \lambda^i)^{p_i}$, $(\lambda - \lambda^i)^{p_i - e_{i1}}$, $(\lambda - \lambda_i)^{p_i - e_{i1} - e_{i2}}$, u.s.w., so ist

$$n_k = \sum (p_i - e_{i1} - e_{i2} \dots - e_{ik}). \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10,2)$$

Bei jedem durch seine SEGRE-Notation gegebenen Typus eines linearen Komplexes findet man durch die Formeln (10,2) und (10,1) eine N -gliedrige metrische Gruppe, welche den Komplex in Ruhe lässt.

11. Bis jetzt war nur von Transformationen B die Rede, welche der Gleichung (9,3) mit $\kappa = 1$ genügen. Sie bilden für sich eine Gruppe.

Für die Transformationen, wofür $\kappa = -1$ ist, liegen die Verhältnisse anders.

Hat man

$$-C = T_1 C_1 T_1^{-1}$$

und

$$-C = T_2 C_2 T_2^{-1},$$

so ist

$$T_1 T_2 C = T_1 \cdot -C T_2 = -T_1 C \cdot T_2 = C T_1 T_2.$$

¹⁾ VOSS, l.c. S. 294.

Das Produkt der beiden Transformationen T_1 und T_2 mit $\kappa = -1$ ist eine Transformation mit $\kappa = 1$. Die Transformationen mit $\kappa = -1$ bilden ein adjungiertes System zur Gruppe der Transformationen mit $\kappa = 1$. Wir erhalten sie also, indem wir eine Transformation mit $\kappa = -1$ bestimmen und das Produkt von T mit der Gruppe $\kappa = 1$ bilden.

Eine solche Transformation T können wir immer durch eine gewisse Vertauschung der x_i und der y_i Koordinaten erhalten. Sind die Zahlen e_{ij} sämtlich gleich 1, so nehme man

$$x'_i = y_i, \quad y'_i = x_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11,1)$$

Ist das nicht der Fall, so ist die Transformation etwas weniger einfach. Wir kommen auf diese Sache bei der Durcharbeitung eines Beispiels zurück. In jedem Falle ist eine Transformation mit $\kappa = -1$ eine solche welche die Gebilde W_1 und W_2 vertauscht.

Wir haben bis jetzt eine Kollineation, welche Q invariant lässt, immer der Kürze wegen eine *Bewegung* genannt.

Es bleibt dann dahingestellt, ob wir mit einer eigentlichen Bewegung oder mit einer Spiegelung zu tun haben.

12. Sämtliche Transformationen welche der Gleichung (9.3) genügen, lassen die Deckfigur von C offenbar invariant.

Die in dem Abschnitt (II) untersuchten, mit dem Komplex kovariant verbundenen Gebilde bleiben bei jeder Bewegung, welche den Komplex invariant lässt, im Ganzen in Ruhe.

Im Besondern gilt das also für die zum Komplex gehörige Achsenfigur.

Wir bemerken noch, dass man auch immer leicht eine Bewegung angeben kann, wobei jede Achse für sich in Ruhe bleibt. Man nehme die Bewegung wobei

$$B_1 = C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12,1)$$

man hat dann weiter

$$B_2 = \varrho (C_1')^{-1} = \varrho C_2^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12,2)$$

In W_1 und in W_2 bleiben dann gewiss die Deckfiguren Punkt für Punkt in Ruhe und damit auch jede Achse.

13. Wir fügten in unsrer Untersuchung jedem linearen Komplex eine sogenannte Produkt-Kollineation C zu. Im allgemeinen ist C nicht eine Bewegung. Dann würde nämlich die Gleichung

$$C_2 = \varrho C_2^{-1}$$

gelten müssen. Die Kollineationen C_1 und C_2 würden involutorisch sein und dieser Umstand kommt, wie man leicht nachgehen kann, nur bei dem Typus vor, wo C_1 und C_2 beide identische Kollineationen sind.

tion, die man zum Ausgangspunkt nahm, durch ihre Inverse ersetzt, dann ist

$$\frac{dx}{dt} = C_1 \{x\}, \quad \frac{dy}{dt} = (C_1')^{-1}(y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13,5)$$

wobei die Bedingungen (9, 9) erfüllt sind.

Die Kollineation C fügt jedem Punkt den Pol des Nullraumes zu.

Wir erhalten also folgende nicht-Euklidische, mehrdimensionale Erweiterung des Satzes von CHASLES:

Jeden linearen Komplex kann man erhalten aus einem Bewegungszustand des Raumes. Die Nullkorrelation ist diejenige, welche einem Punkt den Raum zuordnet, welcher zur momentanen Bewegungsrichtung senkrecht steht.

Die Achsen der Schraubenbewegung sind diejenigen des Komplexes; ihre Parameter sind durch diejenigen des Komplexes bestimmt.

Unsre Klassifikation der linearen Komplexe ist zugleich eine der infinitesimalen Bewegungen des Raumes.

Die infinitesimale Transformation kann man, falls C in der Normalform steht, auf bekannte Weise integrieren. Es entsteht dann eine eingliedrige Bewegungsgruppe.

Die Diskussion der dabei auftretenden linearen homogenen simultanen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten fällt zusammen mit der Frage nach dem Typus des linearen Komplexes.

14. Wir denken uns zwei lineare Komplexe L und L_1 . Die zu L gehörigen x - und y -Kollineationen seien C_1 und $C_2 = -C_1'$; wir setzen voraus dass die zu L_1 gehörigen sind C_1^{-1} und also $(-C_1^{-1})' = C_2^{-1}$. Die Produktkollineationen von L und L_1 sind *invers*. L und L_1 haben im Besondern dieselbe kovariante Figur, also auch dieselben Achsen.

Ist nun P ein willkürlicher Punkt, V sein Polraum, U sein Nullraum bz. L , P' der Pol von U , so ordnet C dem Punkt P den Punkt P' zu; C^{-1} ordnet P' den Punkt P zu, im Komplex L_1 ist also dem Punkt P' der Raum V zugeordnet.

Wir haben also: Sind in L ein gewisser Punkt und ein gewisser Raum einander zugeordnet, so sind in L_1 die polaren Figuren einander zugeordnet. Im Besondern bilden die Leiträume von L und L_1 polarreziproke Mannigfaltigkeiten. Die Komplexe L und L_1 werden durch dieselbe Bewegungsgruppe in Ruhe gelassen.

Wir nennen die Komplexe L und L_1 *apolar*. Es gibt auch Komplexe, welche wir *autopolar* nennen werden; sie sind mit sich selbst apolar. Sie genügen der Bedingung

$$C_1^{-1} = C_1;$$

C_1 und also auch C_2 sind also involutorisch, und da die charakteristischen Wurzeln von C_1 und C_2 verschieden sind, müssen C_1 und C_2 identische Kollineationen sein.

Mathematics. — *Der Basissatz für endliche ABELSche Gruppen.* Von
J. M. STORCH. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Das Folgende enthält einen neuen Beweis für den Basissatz für endliche ABELSche Gruppen. Die Hilfssätze 3 und 4 enthalten zusammen den Beweis für Gruppen von Primzahlpotenzgrad.

Hilfssatz 1. Eine endliche zyklische Gruppe hat eine Basis deren Elemente sämtlich Primzahlpotenzordnung haben.

Beweis. Es seien

$$A, A^2, \dots, A^h (= E)$$

die Gruppenelemente und $h = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ die Primfaktorenzerlegung des Gruppengrades. Dann bilden die Elemente

$$A^{\frac{h}{p_1^{n_1}}}, A^{\frac{h}{p_2^{n_2}}}, \dots, A^{\frac{h}{p_r^{n_r}}}$$

eine Basis. Denn wenn in

$$A^{\alpha_1 \frac{h}{p_1^{n_1}}} A^{\alpha_2 \frac{h}{p_2^{n_2}}} \dots A^{\alpha_r \frac{h}{p_r^{n_r}}}$$

die Zahlen α_i ($i = 1, 2, \dots, r$) die Werte $1, 2, \dots, p_i^{n_i}$ durchlaufen, erhält man $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} = h$ Gruppenelemente. Diese sind auch alle verschieden, denn aus

$$A^{\beta_1 \frac{h}{p_1^{n_1}}} A^{\beta_2 \frac{h}{p_2^{n_2}}} \dots A^{\beta_r \frac{h}{p_r^{n_r}}} = A^{\gamma_1 \frac{h}{p_1^{n_1}}} A^{\gamma_2 \frac{h}{p_2^{n_2}}} \dots A^{\gamma_r \frac{h}{p_r^{n_r}}}$$

folgt, wenn man zur Potenz $\frac{h}{p_i^{n_i}}$ erhebt:

$$A^{\beta_i \left(\frac{h}{p_i^{n_i}} \right)^2} = A^{\gamma_i \left(\frac{h}{p_i^{n_i}} \right)^2}$$

und hieraus

$$\beta_i \left(\frac{h}{p_i^{n_i}} \right)^2 \equiv \gamma_i \left(\frac{h}{p_i^{n_i}} \right)^2 \pmod{h} \text{ also, } \beta_i \equiv \gamma_i \pmod{p_i^{n_i}}$$

Hilfssatz 2. Jedes Element einer endlichen ABELSchen Gruppe ist ein Produkt von Elementen von Primzahlpotenzordnung.

Beweis. Es sei A das Element. Die von A erzeugte zyklische Gruppe hat nach Hilfssatz 1 eine Basis deren Elemente P, Q, R, \dots Primzahlpotenzordnungen haben. Also $A = P^\alpha Q^\beta R^\gamma \dots$

Hilfssatz 3. Es sei eine endliche ABELSche Gruppe gegeben in der die Elemente alle als Ordnung eine Potenz derselben Primzahl p haben. Wenn eine Relation

$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} A_3^{\alpha_3} \dots = E \quad 1)$$

besteht für Elemente von Ordnungen $\geq p^k$ und keine für Elemente von Ordnungen $> p^k$, kann man eins der in der Relation vorkommenden Elemente von der Ordnung p^k darstellen als Produkt von Potenzen der übrigen A_i der Relation und eines Elementes F von einer Ordnung $< p^k$.

Beweis. Es sei $g = p^l$ ($l \geq 0$) die höchste Potenz von p die in sämtlichen α_i aufgeht. Dann ist $l < k$ weil Elemente von der Ordnung p^k in der Relation vorkommen und also wenigstens ein α_i nicht durch p^k teilbar ist (S. Fussnote). Es sei

$$A_1^{\frac{\alpha_1}{g}} A_2^{\frac{\alpha_2}{g}} A_3^{\frac{\alpha_3}{g}} \dots = F.$$

Die Ordnung von F ist $\equiv g$, also $< p^k$. Es sei $\frac{\alpha_m}{g}$ diejenige oder eine derjenigen der Zahlen $\frac{\alpha_i}{g}$ die nicht durch p teilbar sind. Dann lässt sich A_m auflösen und darstellen als Produkt von Potenzen von F und den übrigen A_i . A_m kann nicht eine Ordnung $> p^k$ haben, weil sonst $A_m^{p^k}$ darstellbar wäre als Produkt von Potenzen von Elementen von Ordnungen $> p^k$, was eine den Voraussetzungen widersprechende Relation geben würde.

Hilfssatz 4. Die Gruppe von Hilfssatz 3 hat eine Basis.

Beweis. Wenn eine Relation existiert zwischen Elementen von der höchsten vorkommenden Ordnung p^n , kann man nach Hilfssatz 3 ein Element auflösen. Dieses Element lässt man fort. Man wiederholt diese Operation bis man ein System von Elementen von der Ordnung p^n übrig hat, zwischen denen keine Relation mehr besteht. Dann nimmt man die Elemente von der Ordnung p^{n-1} hinzu. Wenn jetzt zwischen den Elementen von der Ordnung p^{n-1} und den übriggebliebenen Elementen von der Ordnung p^n eine Relation existiert, kann man nach Hilfssatz 3 ein Element von der Ordnung p^{n-1} auflösen und fortlassen. Man fährt in derselben Weise fort, bis keine Relation mehr existiert zwischen den übriggebliebenen Elementen von den Ordnungen p^n und p^{n-1} . Dann nimmt man

1) Wir setzen dabei voraus dass kein α_i durch die Ordnung des zugehörigen Elementes A_i teilbar ist.

die Elemente von der Ordnung p^{n-2} hinzu, u.s.w. Am Ende hat man Elemente, zwischen denen keine Relation besteht. Aus der Weise in der diese Elemente konstruiert sind, ist unmittelbar klar, dass auch jedes Gruppenelement durch die übriggebliebenen darstellbar ist,

Hauptsatz. Jede endliche ABELSche Gruppe hat eine Basis deren Elemente Primzahlpotenzordnung haben.

Beweis. Es seien

$$A_i \ B_i \ C_i \ \dots \ (i=1, 2, 3 \dots)$$

die Elemente deren Ordnungen Potenzen der Primzahl p_i sind. ($p_i^{n_i}$ sei die höchste der vorkommenden). Diese bilden eine Gruppe, welche nach Hilfssatz 4 eine Basis $P_i \ Q_i \ R_i \ \dots$ besitzt.

$$P_1 \ Q_1 \ R_1 \ \dots \ P_2 \ Q_2 \ R_2 \ \dots \ P_3 \ Q_3 \ R_3 \ \dots \ \dots \ (1)$$

alle zusammengenommen bilden dann eine Basis der ganzen Gruppe, weil nach Hilfssatz 2 jedes Element darstellbar ist als Produkt der Elemente

$$A_1 \ B_1 \ C_1 \ \dots \ A_2 \ B_2 \ C_2 \ \dots \ A_3 \ B_3 \ C_3 \ \dots$$

also auch als Produkt von Potenzen der Elemente (1). Diese Darstellung ist überdies eindeutig, denn aus

$$P_1^{\alpha_1} Q_1^{\beta_1} R_1^{\gamma_1} \dots P_2^{\alpha_2} Q_2^{\beta_2} R_2^{\gamma_2} \dots = P_1^{\lambda_1} Q_1^{\mu_1} R_1^{\nu_1} \dots P_2^{\lambda_2} Q_2^{\mu_2} R_2^{\nu_2} \dots$$

würde durch Erhebung in die Potenz $\frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots}{p_i^{n_i}}$ eine Relation zwischen $P_i \ Q_i \ R_i \ \dots$ folgen.

Mathematics. — *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. I. Einordnung in die Affingeometrie.* Von D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE).

(Communicated at the meeting of April 30, 1932).

§ 1. Einleitung.

In einer eben erschienenen Arbeit¹⁾ habe ich gezeigt, dass es möglich ist, eine Theorie der projektiv zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten

¹⁾ D. VAN DANTZIG, Theorie des projektiven Zusammenhangs n -dimensionaler Räume, Math. Ann. **106** (1932) 400—454, zitiert mit TPZ. Es werden die Bezeichnungen des Nachtrags zu TPZ benutzt, unter Weglassung des dort verwendeten *. Für einige Abweichungen vgl. Fussnote ¹⁰⁾, ¹¹⁾, sowie den Anfang von § 2.

aufzubauen, die die sämtlichen älteren Theorien²⁾ umfasst und verallgemeinert. Der wesentliche Schritt war die Ersetzung der Gruppe \mathfrak{G}_n aller³⁾ Transformationen in n Veränderlichen durch die Gruppe \mathfrak{S}_{n+1} aller³⁾ homogenen Transformationen ersten Grades⁴⁾ in $n + 1$ Veränderlichen. Weiter wurde der Begriff eines allgemeinen projektiven Zusammenhangs eingeführt, zu dem weder geodätische Linien noch eine Uebertragung (bzw. kovariantes Differential) zu existieren brauchen, sodass derselbe sich in keiner Weise aus einem (n -dimensionalen) affinen Zusammenhang erhalten lässt. Damit ist die allgemeine projektive Differentialgeometrie⁵⁾ zu einem autonomen Bestandteil der Differentialgeometrie geworden⁶⁾ und es fragt sich, den Kleinschen Ideenkreis auch auf diese gekrümmte Mannigfaltigkeiten zu erweitern.

Das erste sich darbietende Problem ist: die Theorie des affinen Zusammenhangs in die Theorie des projektiven Zusammenhangs einzuordnen. Bekanntlich entsteht die (gewöhnliche) affine Geometrie aus der (gewöhnlichen) projektiven Geometrie durch Auszeichnung einer ("unendlichfernen" oder "uneigentlichen") Hyperebene. In der allgemeinen Differentialgeometrie ist das Verhältnis ganz analog: die Affingeometrie⁷⁾ lässt sich dadurch aus der projektiven Differentialgeometrie gewinnen, dass man in jeder lokalen Mannigfaltigkeit eine den Berührungspunkt nicht enthaltende Hyperebene auszeichnet (§ 3). In diesem Fall lässt sich weiter aus jedem projektiven Zusammenhang eindeutig ein affiner Zusammenhang⁸⁾ herleiten. Zum Schluss werden die wichtigsten durch den projektiven Zusammenhang bestimmten Kurvensysteme ("geodätische Linien") untersucht (§ 4). Im einleitenden § 2 wird eine kurze Uebersicht über die wichtigsten Grundbegriffe gegeben; für eine ausführlichere Darstellung sei auf TPZ verwiesen, sowie auf eine demnächst gemeinsam mit Prof. J. A. SCHOUTEN zu veröffentlichende Arbeit.

Auf die Einordnung der projektiven Differentialgeometrie in die affine mit um Eins erhöhter Dimensionszahl, sowie auf die Einordnung der konformen Differentialgeometrie in die projektive hoffe ich bei einer späteren Gelegenheit einzugehen.

2) Für die wichtigste Litteratur vgl. TPZ, sowie ENEA BORTOLOTTI, Connessioni proiettive, Boll. Un. Mat. Ital. 9 (1930) 288—294; 10 (1931) 28—34; 83—90.

3) Von allen vorkommenden Funktionen wird (auch ohne ausdrückliche Erwähnung) vorausgesetzt, dass sie analytisch und im betrachteten Gebiet regulär sind; von allen Transformationen überdies dass sie ebendort eine eindeutige Umkehrung gestatten.

4) Aber nicht notwendig lineare!

5) Wir benutzen diesen Ausdruck für die Theorie der projektiv-zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, in Gegensatz zur gewöhnlichen projektiven Differentialgeometrie der in sich ebenen ("euklidischen") Mannigfaltigkeiten.

6) In den älteren Theorien hatten wenigstens die Differentiationsindizes noch Vektorcharakter, ausser bei VEBLEN, wo aber noch ein formaler Unterschied bestehen bleibt.

7) Kurz für Mannigfaltigkeit mit allgemeiner Gruppe \mathfrak{G}_n .

8) Kurz für die allgemeine lineare (nicht notwendig symmetrische) Uebertragung L_n (III A α) nach der Klassifizierung von J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül, Berlin, Springer (1924) S. 75.

§ 2. Allgemeines.

Wir bezeichnen mit

- \mathfrak{G}_n die Gruppe aller³⁾ Transformationen $\xi^k \rightarrow \xi^{k'} = \xi^{k'}(\xi^1, \dots, \xi^n)$ in n Variablen ($h, \dots, l = 1, \dots, n$; $h', \dots, l' = 1', \dots, n'$);
- \mathfrak{G}_{n+1} die Gruppe aller³⁾ homogenen Transformationen ersten Grades⁴⁾ $x^\nu \rightarrow x^{\nu'} = x^{\nu'}(x^0, x^1, \dots, x^n)$ in $n+1$ Variablen ($\iota, \kappa, \dots, \omega = 0, 1, \dots, n$; $\iota', \kappa', \dots, \omega' = 0', 1', \dots, n'$);
- \mathfrak{F} die Gruppe aller Punkttransformationen $x^\nu \rightarrow \bar{x}^\nu = \varrho x^\nu$ (ϱ homogen nullten Grades in den x^ν);
- X_n eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Urvariablen ξ^k und \mathfrak{G}_n als Gruppe der Koordinatentransformationen;
- H_n eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $n+1$ (überzähligen, "homogenen") Koordinaten x^ν und \mathfrak{G}_{n+1} bzw. \mathfrak{F} als Gruppe der Koordinaten- bzw. Punkttransformation (in TPZ mit ${}^{n+1}H$ bezeichnet);
- L_n eine X_n mit allgemeiner linearer Uebertragung;
- P_n eine H_n mit allgemeinem projektiven Zusammenhang (in TPZ mit ${}^{n+1}P$; in älteren Arbeiten von J. A. SCHOUTEN mit \mathfrak{P}_n bezeichnet);
- E_n eine in sich ebene ("euklidische") L_n ;
- E_n^* eine in sich ebene ("projektiveuklidische") P_n (d.h. Mannigfaltigkeit mit gewöhnlicher projektiver Geometrie) (in TPZ mit ${}^{n+1}E$, bei J. A. SCHOUTEN früher mit P_n bezeichnet).

Uebersicht über die Transformationsweisen.

	bei \mathfrak{G}_{n+1}	bei \mathfrak{F}
Skalar r -ten Grades	$\overset{(\nu')}{p} = \overset{(\nu)}{p}$	$\bar{p} = \varrho^r p$
Kontravarianter Punkt ⁹⁾ r -ten Grades	$v^{\nu'} = \mathcal{N}_{\nu}^{\nu'} v^\nu$	$\bar{v}^\nu = \varrho^r v^\nu$
Kovarianter Punkt ⁹⁾ r -ten Grades	$w_{\nu'} = \mathcal{N}_{\nu'}^\nu w_\nu$	$\bar{w}_\nu = \varrho^r w_\nu$
Projektor r -ten Grades (z. B.)	$X_{\lambda' \mu'}^{\nu'} = \mathcal{N}_{\lambda' \mu'}^{\lambda \mu \nu'} X_{\lambda \mu}^{\nu}$	$\bar{X}_{\lambda \mu}^{\nu} = \varrho^r X_{\lambda \mu}^{\nu}$
(Projektive) Dichte r -ten Grades vom Gewicht \mathfrak{k}	$\overset{(\nu')}{p} = \Delta^{-\mathfrak{k}} \overset{(\nu)}{p}$	$\bar{p} = \varrho^r p$
Projektordichte r -ten Grades vom Gewicht \mathfrak{k} (z. B.)	$\mathfrak{X}_{\lambda' \mu'}^{\lambda' \nu'} = \Delta^{-\mathfrak{k}} \mathcal{N}_{\lambda' \mu'}^{\lambda \mu \nu'} \mathfrak{X}_{\lambda \mu}^{\lambda \nu}$	$\bar{\mathfrak{X}}_{\lambda \mu}^{\lambda \nu} = \varrho^r \mathfrak{X}_{\lambda \mu}^{\lambda \nu}$
(Projektives) geometrisches Objekt	irgendwie	irgendwie

⁹⁾ In TPZ mit „kontravariantem Ort r -ten Grades“ bezeichnet. Es ist aber besser, den Ausdruck „Ort“ für Mengen koinzidenter Punkte $\lambda \nu^\nu$ mit völlig freiem Faktor λ zu reservieren, was hier auch geschehen wird. Ohne Beschränkung kann man aber voraussetzen dass λ homogen nullten Grades ist.

wo

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_{\nu'}^* &= \partial_{\nu} x^{\nu'}, {}^{10) 11)} & \partial_{\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \\ \mathcal{N}_{\nu'}^* &= \partial_{\nu'} x^{\nu}, & \partial_{\nu'} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

die gemischten Bestimmungszahlen (Funktionalmatrix) des *Einheitsprojektors* \mathcal{N}_{μ}^{ν} sind und

$$\Delta = \text{Det}(\mathcal{N}_{\nu}^{\nu}) \dots \dots \dots (2)$$

die Funktionaldeterminante ist.

Nimmt ein geometrisches Objekt den Faktor ϱ^{ε} an, wenn man für *konstantes* ε erst die Transformation $x^{\nu} \rightarrow \varrho x^{\nu}$ aus \mathfrak{F} und dann die Transformation $x^{\nu} \rightarrow x^{\nu'} = \varrho^{-1} x^{\nu}$ aus \mathfrak{G}_{n+1} ausführt¹²⁾, so heisst ε der *Exzess* des geometrischen Objektes. Für (einen Projektor oder) eine Projektordichte r -ten Grades $\mathfrak{X}_{\mu_1 \dots \mu_s}^{\nu_1 \dots \nu_t}$ vom Gewicht \mathfrak{f} (t heisst die *kontravariante Valenz*, s die *kovariante Valenz*, $s + t$ die *Valenz*) ist

$$\varepsilon = r - (t - s) - (n + 1) \mathfrak{f} \dots \dots \dots (3)$$

Das *Gewicht*¹³⁾ eines kovarianten Punktes w_{μ} ist der Skalar

$$w = w_{\mu} x^{\mu} \dots \dots \dots (4)$$

Jeder Hyperebene der lokalen E_n^* die den Berührungsort x^{ν} nicht enthält kann *eindeutig* ein kovarianter Punkt mit Gewicht 1 zugeordnet werden. Für kontravariante Punkte ist eine solche Zuordnung nur im projektiv-affinen Fall (§ 3) möglich.

Sind $\xi^k(h, \dots, l = 1, \dots, n)$ irgend n unabhängige homogene Funktionen nullten Grades der x^{ν} ¹⁴⁾ (d.h. $x^{\mu} \partial_{\mu} \xi^k = 0$), die der Gruppe \mathfrak{G}_n unterzogen seien, so bestimmen sie eine X_n , deren Punkte den *Orten* der H_n *eindeutig* entsprechen, also mit diesen identifiziert werden können¹⁵⁾. Die Transformationen von \mathfrak{G}_n und \mathfrak{G}_{n+1} seien ganz unabhängig von

¹⁰⁾ In TPZ mit $A_{\nu}^{\nu'}$ bezeichnet. Den gewöhnlichen Buchstaben A wollen wir aber für den *Einheitsaffinor* reservieren.

¹¹⁾ Wir verwenden das Zeichen $\overset{*}{=}$ wenn die linke oder rechte Seite einer Gleichung ein Projektor ist, und die Gleichung *nicht bei allen holonomen oder anholonomen Transformationen* der Bezugssysteme (und zwar für jeden einzelnen Index für sich) invariant ist.

¹²⁾ Dieser Prozess ist ein spezieller Fall des aus der Lehre der Deformationen bekannten „Mitschleppens“ eines Koordinatensystems.

¹³⁾ Im Möbiusschen Sinne. Nicht zu verwechseln mit dem Gewicht einer Dichte. VEBLEN's „weight“ oder „index“ entspricht nicht unsrem Gewicht sondern unsrem Exzess.

¹⁴⁾ In TPZ § 14 wurden nur die speziellen Funktionen $\xi^k \overset{*}{=} \frac{x^k}{x^0}$ betrachtet.

¹⁵⁾ Dennoch darf der Unterschied zwischen X_n und H_n selbst nicht vertuscht werden, weil *geometrische Objekte* der X_n und der H_n ganz verschieden sein können.

einander gehalten, d.h. die ξ^k bzw. die x^ν seien *Skalare* bzgl. \mathfrak{S}_{n+1} bzw. \mathfrak{G}_n . Setzt man

$$E_\mu^k = \partial_\mu \xi^k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

so transformiert E_μ^k sich mit dem Index k wie ein Affinor, mit dem Index μ wie ein Projektor:

$$E_{\mu'}^{k'} = \mathcal{N}_{\mu'}^{\mu} E_\mu^k A_k^{k'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dabei bezeichnet $A_k^{k'}$ den Einheitsaffinor der X_n . E_μ^k bildet das Verbindungsglied zwischen Affinoren und Projektoren: jedem *kontravarianten Punkt* ordnet er in *eindeutiger* Weise einen kontravarianten Vektor und jedem *kovarianten Vektor* in *eineindeutiger* Weise einen kovarianten Punkt vom Gewicht 0 zu:

$$'v^k = E_\mu^k v^\mu; \quad 'w_\mu = E_\mu^k w_k, \quad 'w_\mu x^\mu = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Zu beachten ist, dass $'v^k$ nicht nur vom Ort λv^ν sondern vom Punkte v^ν selbst abhängt.

§ 3. Projektiv-affine Mannigfaltigkeiten.

In jeder lokalen E_n^* der H_n sei eine nicht durch x^ν hindurchgehende Hyperebene ein für allemal gegeben. Nach dem obigen können wir sie eindeutig durch einen kovarianten Punkt t_ν mit Gewicht 1 und Exzess 0 darstellen:

$$t_\nu x^\nu = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wir nennen eine solche mit einem Hyperebenenfelde ausgestattete H_n *projektiv-affin*. In einer *projektiv-affinen* H_n kann man auch jedem *kontravarianten Punkte* v^ν ein Gewicht

$$v = v^\nu t_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

zulegen, und jedem kontravarianten Orte der nicht in t_ν liegt eineindeutig seinen kontravarianten Punkt mit Gewicht 1 zuordnen. Dem Affinorprojektor E_ν^k lässt sich jetzt eindeutig ein dual entsprechender E_k^ν zur Seite stellen, der eine Lösung ist der Gleichungen

$$E_j^\nu E_\nu^k = A_j^k, \quad t_\nu E_j^\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

In einer projektiv-affinen H_n gibt es eine *eineindeutige* Abbildung von den ko- und kontravarianten *Punkten* mit *Gewicht* und *Exzess* Null der E_n^* auf den ko- bzw. kontravarianten *Vektoren* der E_n :

$$\left. \begin{aligned} v^k &= E_\mu^k v^\mu \quad \text{für} \quad v^\mu t_\mu = 0; & v^\nu &= E_k^\nu v^k, \\ w_j &= E_j^\nu w_\nu \quad \text{für} \quad w_\nu x^\nu = 0; & w_\mu &= E_\mu^k w_k. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wir können diese also mit einander identifizieren (was wir durch Verwendung desselben Kernbuchstaben zum Ausdruck bringen) und Affinoren als eine spezielle Art von Projektoren, insbesondere Vektoren als eine spezielle Art von Punkten, nämlich als Punkte mit Gewicht und Exzess Null betrachten. Mittels dieser Zuordnung stellt sich der Affinorprojektor E_μ^k als identisch mit dem Einheitsaffinor A_j^k (aber nicht mit dem Einheitsprojektor \mathcal{N}_μ^v !) heraus; wir werden dementsprechend den Kernbuchstaben E durch A ersetzen:

$$A_\mu^k = \partial_\mu \xi^k, \quad x^\mu A_\mu^k = 0; \quad A_{jv}^k = A_j^k, \quad t_v A_k^v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$A_\mu^v = \mathcal{N}_\mu^v - x^v t_\mu.$$

Die Differenz zweier ko- oder kontravarianter Punkte ist dann und nur dann ein Vektor, wenn die Punkte gleiches Gewicht haben. Demzufolge kann man jedem ko- und kontravarianten Ort μw_ν , bzw. λv^ν der nicht durch x^ν hindurchgeht, bzw. nicht in t_ν liegt, eindeutig einen Vektor w'_μ bzw. v'^ν zuordnen mittels der Beziehung

$$\left. \begin{aligned} v'^\nu &= \frac{1}{v} v^\nu - x^\nu = \frac{1}{v} A_\mu^v v^\mu, \quad v = v^\nu t_\nu \neq 0, \\ w'_\mu &= \frac{1}{w} w_\mu - t_\mu = \frac{1}{w} A_\mu^v w_\nu, \quad w = w_\mu x^\mu \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

oder mit affinen Bestimmungszahlen:

$$v'^k = \frac{1}{v} A_\nu^k v^\nu, \quad w'_\mu = \frac{1}{w} A_\mu^j w_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

v'^ν und w'_μ sind nämlich invariant bei Ersetzung von v^ν bzw. w_μ durch mit diesen koinzidente Punkte. Geometrisch ist $\lambda v'^\nu$ der Schnittpunkt von t_ν mit der Verbindungsgerade von v^ν und x^ν ; der Faktor λ ändert sich dann und nur dann wenn der Ort von v^ν sich über diese Gerade bewegt, und wird dann und nur dann Null wenn v^ν mit x^ν koinzidiert. Entsprechend ist $\mu w'_\nu$ die Verbindungs- E_{n-1}^* von x_ν mit der Durchschnitts- E_{n-2}^* der beiden E_{n-1}^* w_ν und t_ν ; der Faktor μ ändert sich dann und nur dann wenn diese E_{n-1}^* im E_{n-1}^* -Büschel um diese E_{n-2}^* dreht, und wird dann und nur dann Null wenn sie mit t_ν koinzidiert. Wegen (13) ist die Inzidenzbedingung $v^\nu w_\nu = 0$ für ko- und kontravariante Punkte mit der Inzidenzbedingung $v'^\nu w'_\nu = 1$ für die zugehörigen Vektoren äquivalent. Durch seinen Vektor v'^ν bzw. w'_ν und sein Gewicht v bzw. w ist jeder Punkt v^ν bzw. w_ν eindeutig bestimmt:

$$v^\nu = \begin{cases} v(v'^\nu + x^\nu) & \text{für } v \neq 0 \\ v'^\nu & \text{für } v = 0 \end{cases} \quad w_\nu = \begin{cases} w(w'_\nu + t_\nu) & \text{für } w \neq 0 \\ w'_\nu & \text{für } w = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Definiert man die Differenz zweier Orte μu^ν , λv^ν durch

$$\frac{v^\nu}{v} - \frac{u^\nu}{u}, \quad u = u^\nu t_\nu \neq 0, \quad v = v^\nu t_\nu \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

so ist sie stets ein Vektor, und man verifiziert leicht, dass sie mit der Punktdifferenz der MÖBIUS-GRASSMANNschen Punktrechnung identisch ist. Deutet man t_ν als "unendlich-ferne" Hyperebene, so kann man nicht nur in der E_n^* , sondern auch in der H_n selbst bis auf Größen zweiter Ordnung genau infinitesimale Parallelogramme bilden¹⁶⁾, die den Additionseigenschaften der Linienelemente entsprechen. Sind nämlich $y^\nu, z^\nu, u^\nu, v^\nu$, vier Orte der H_n die in einer infinitesimalen Umgebung des Ortes x_ν der H_n liegen, so verifiziert man leicht¹⁷⁾, dass die Bedingung für die Parallelogrammlage

$$\frac{y^\nu}{y^\mu t_\mu} - \frac{z^\nu}{z^\mu t_\mu} = \frac{u^\nu}{u^\mu t_\mu} - \frac{v^\nu}{v^\mu t_\mu} \quad , \quad (t_\mu = t_\mu)(x)$$

bei \mathfrak{F} exakt invariant und bis auf Größen zweiter Ordnung bei \mathfrak{F}_{n+1} invariant und unabhängig von der Lage von x_ν ist.

Ist y^ν ein infinitesimal benachbarter Punkt der H_n von x^ν , so ist das Differential $dx^\nu = y^\nu - x^\nu$ bekanntlich nicht bei \mathfrak{F} invariant:

$$dx^\nu = q dx^\nu + x^\nu dq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

In einer projektiv-affinen H_n kann man ihm aber eindeutig ein Vektordifferential $d'x^\nu$ zuordnen, das wohl bei \mathfrak{F} (relativ) invariant ist, nur vom Orte von y^ν abhängt und mit dem gewöhnlichen Linienelemente übereinstimmt:

$$d'x^\nu = A_\mu^\nu dx^\mu = dx^\nu - (t_\mu dx^\mu) x^\nu = \frac{y^\nu}{y^\mu t_\mu} - x^\nu = A_k^\nu d\xi^k \quad . \quad (18)$$

Die Affinisierung der projektiven Differentialgeometrie mittels eines kovarianten Punktes t_μ mit Gewicht 1 erklärt auch die Bedeutung der projektiven Dichten für die älteren Theorien¹⁸⁾:

Ist nämlich \mathfrak{G} eine beliebige projektive Dichte vom Grad r und vom Gewicht $\mathfrak{k} \neq 0$, so ist

$$t_\mu = \frac{1}{\mathfrak{G}} \partial_\mu \mathfrak{G}$$

eine teilweise unbestimmte Hyperebene die nicht durch den Berührungs-

¹⁶⁾ Daraus folgt natürlich noch nicht die Existenz einer Uebertragung, weil dazu die Existenz eines Parallelismus bis auf Größen dritter Ordnung genau erforderlich ist.

¹⁷⁾ Man braucht dazu die Transformationsformeln für $y^\nu = x^\nu + dx^\nu$ usw., als Punkte der H_n (nicht der E_n^*) betrachtet:

$$\begin{aligned} y^{\nu'} = x^{\nu'}(y) &= x^{\nu'}(x) + dx^\lambda \mathcal{N}_\lambda^{\nu'} + \frac{1}{2} dx^\lambda dx^\lambda \partial_{\lambda\lambda} x^{\nu'} + \dots = \\ &= y^\mu \mathcal{N}_\mu^{\nu'} + \frac{1}{2} dx^\lambda dx^\lambda \partial_{\lambda\lambda} x^{\nu'} + \dots \end{aligned}$$

¹⁸⁾ Vgl. TPZ, § 14.

punkt geht. In der Tat kommt \mathfrak{G} in den älteren Theorien (bei geeigneter Umformung) ausschliesslich in der Verbindung (21) vor. Wegen

$$x^\mu \partial_\mu \mathfrak{G} = r \mathfrak{G} = \varepsilon \mathfrak{G} + \mathfrak{k} (n+1) \mathfrak{G}$$

ist t_μ für Dichten vom Exzess Null dann und nur dann normiert wenn

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{n+1} \text{ ist.}$$

§ 4. Projektiver und affiner Zusammenhang.

Es sei jetzt mittels eines Funktionensystems $\Pi_{\lambda\mu}^\nu$ vom Grade -1 mit Transformationsweise

$$\Pi_{\lambda'\mu'}^{\nu'} = \mathcal{N}_{\lambda'\mu'}^{\lambda\mu\nu} \Pi_{\lambda\mu}^\nu + \mathcal{N}_{\rho'}^{\nu'} \partial_{\mu'} \mathcal{N}_{\lambda'}^\rho \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

in der H_n ein beliebiger projektiver Zusammenhang gegeben. Zwecks späterer Verwendung verzeichnen wir die Formeln:

$$x^\mu \nabla_\mu v^\nu = + P_{,\mu}^\nu v^\mu; \quad x^\mu \nabla_\mu w_\lambda = - P_{,\lambda}^\nu w_\nu \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$P_{,\lambda}^\nu = \Pi_{\lambda\mu}^\nu x^\mu + \mathcal{N}_{\lambda}^{\nu,19)} \quad Q_{,\mu}^\nu = \Pi_{\lambda\mu}^\nu x^\lambda + \mathcal{N}_{\mu}^\nu; \quad b^\nu = P_{,\lambda}^\nu x^\lambda = Q_{,\mu}^\nu x^\mu. \quad (21)$$

Der projektive Zusammenhang bestimmt eindeutig eine *Korrespondenz* die jedem Punkte v^ν den Punkt $x^\mu \nabla_\mu v^\nu$ zuordnet. Weil $x^\mu \nabla_\mu \lambda$ für jeden Skalar λ vom Exzess Null verschwindet, ist $x^\mu \nabla_\mu v^\nu = \lambda x^\mu \nabla_\mu v^\nu$, sodass die Korrespondenz eindeutig eine projektive Abbildung (für die Orte) der E_n^* in sich bestimmt. Diese bestimmt ihrerseits die Korrespondenz nur bis auf einen beliebigen Faktor welcher durch eine beliebige nicht verschwindende Invariante von $P_{,\mu}^\nu$, z.B. $P_{,\rho}^\rho$ oder $P_{,\mu}^\nu P_{,\nu}^\mu$ festgelegt werden kann.²⁰⁾

Wegen (16) bestimmt $dx^\mu \nabla_\mu v^\nu$ im allgemeinen keinen bestimmten Punkt; der Ausdruck ist nur bis auf ein beliebiges Vielfache des korrespondierenden Punktes $x^\mu \nabla_\mu v^\nu$ bestimmt. Es existiert also im allgemeinen *kein* kovariantes Differential. Um ein solches zu erhalten gibt es zwei Möglichkeiten: erstens kann das die Unbestimmtheit verursachende Zusatzglied verschwinden weil $P_{,\lambda}^\nu = 0$ ist²¹⁾; zweitens aber kann es gelingen, aus den unendlich vielen möglichen Punkten eindeutig einen herauszuwählen. Dieser Fall tritt in einer projektiv-affinen P_n auf, weil man da

¹⁹⁾ In TPZ Nachtrag mit $\check{P}_{\lambda}^{\nu}$ bezeichnet.

²⁰⁾ Bei der wichtigsten physikalischen Anwendung ist $P_{,\mu}^\nu P_{,\nu}^\mu$ bis auf einen konstanten Faktor die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.

²¹⁾ Vgl. TPZ § 7, 8.

das Differential mittels (18) normieren kann. Den dadurch entstehenden kovarianten Differentialoperator bezeichnen wir mit δ :

$$\delta = d' x^\lambda \nabla_\lambda = dx^\mu A_\mu^\rho \nabla_\rho = dx^\lambda \nabla_\lambda - (t_\mu dx^\mu) x^\lambda \nabla_\lambda \quad (22)$$

Dieses kovariante Differential definiert im allgemeinen noch keine affine Uebertragung, weil das kovariante Differential eines Affinors im allgemeinen kein Affinor sondern ein Projektor ist. Durch den projektiven Zusammenhang ist aber wohl ein affiner Zusammenhang mit Differentialoperator $\overset{A}{\nabla}_\lambda$ mitbestimmt, den man erhält wenn man den Affinorteil der kovarianten Ableitung eines Affinors nimmt:

$$\left. \begin{aligned} \overset{A}{\nabla}_\mu v^\nu &= A_{\mu\sigma}^{\rho\nu} \nabla_\rho v^\sigma \quad \text{für} \quad v^\nu t_\nu = 0, \\ \overset{A}{\nabla}_\mu x^\nu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\overset{A}{\nabla}_\mu w_\nu = A_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \nabla_\rho w_\sigma \quad \text{für} \quad w_\nu x^\nu = 0;$$

Sind $\overset{A}{\Pi}_{\lambda\mu}^\nu = A_{\lambda\mu k}^{ij\nu} I_{ij}^k + A_k^\nu \partial_\mu A_\lambda^k$ die zugehörigen Uebertragungsparameter und ist

$$X_{\lambda\mu}^{\cdot\nu} = \Pi_{\lambda\mu}^\nu - \overset{A}{\Pi}_{\lambda\mu}^\nu \quad (24)$$

so ist

$$\left. \begin{aligned} X_{\lambda\mu}^{\cdot\nu} &= -x^\nu \nabla'_\mu t_\lambda + P_{\cdot\lambda}^\nu t_\mu + t_\lambda Q_{\cdot\mu}^\nu + A_{\lambda\cdot}^\rho P_{\cdot\rho}^\sigma t_\sigma t_\mu x^\nu + \\ &\quad + t_\lambda t_\mu b'^\nu + x^\nu t_\lambda Q_{\cdot\mu}^\rho t_\rho \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

wo

$$\nabla'_\mu t_\lambda = A_{\mu\lambda}^{\sigma\rho} \nabla_\sigma t_\rho, \quad P_{\cdot\lambda}^\nu = A_{\sigma\lambda}^{\nu\rho} P_{\cdot\rho}^\sigma, \quad Q_{\cdot\mu}^\nu = A_{\sigma\mu}^{\nu\rho} Q_{\cdot\rho}^\sigma, \quad b'^\nu = A_\rho^\nu b^\rho \quad (26)$$

die Affinorteile der ungestrichen Grössen bezeichnen. Damit der Differentialoperator ∇_μ selbst bei Anwendung auf Affinoren mit $\overset{A}{\nabla}_\mu$ identisch ist, ist notwendig und hinreichend, dass $\nabla_\mu x^\nu$, $\nabla_\mu t_\nu$ und $P_{\cdot\lambda}^\nu$ die folgende Gestalt haben:

$$\nabla_\mu x^\nu = q_\mu x^\nu, \quad \nabla_\mu t_\nu = -q_\mu t_\nu, \quad (27)$$

$$P_{\cdot\lambda}^\nu = P x^\nu t_\lambda \quad P = q_\rho x^\rho \quad (28)$$

In diesem Fall kann man den projektiven Zusammenhang also selbst einen affinen Zusammenhang nennen. Umgekehrt bestimmt ein affiner Zusammenhang mit den Parametern Π_{ij}^k eindeutig einen projektiven Zusammenhang, (wenn man noch fordert dass $q_\mu = 0$, also auch $P = 0$ ist) sobald die mit der "uneigentlichen" zu identifizierende Hyperebene der E_n^* gegeben

22) Man kann dies auch so auffassen, dass der Differentialoperator ∇_μ durch $\nabla_\mu^* = A_{\mu\cdot}^\rho \nabla_\rho$ ersetzt wird. Es ist dann $\Pi_{\lambda\mu}^{*\nu} = \Pi_{\lambda\mu}^\nu - P_{\cdot\lambda}^\nu t_\mu$, sodass $P_{\cdot\lambda}^{*\nu} = 0$ wird. Für ∇_μ^* gelten die Ausführungen von TPZ, und das in (22) definierte kovariante Differential ist dem gewöhnlichen Differential (TPZ. § 7) bzgl. ∇_μ^* gleich.

identisch. Falls der projektive Zusammenhang selber ein affiner ist, ist dies wegen (27) immer der Fall. Ausser der pseudogeodätischen, der pseudo-affingeodätischen und der affingeodätischen Linien sind noch die *halb-affingeodätischen Linien* von Bedeutung, insbesondere für das Unifikationsproblem der Physik ²⁴⁾. Ihre Definitionsgleichung lautet:

$$v'^{\mu} \nabla_{\mu} v^{\nu} = \varphi v^{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Sie entstehen durch fortgesetzte *Uebertragung* eines Ortes (Nullsetzen des kovarianten Differentials (22)) in die Richtung seines Vektors (seiner Verbindungsgerade mit x^{ν}) und sind unabhängig vom Gewicht von v^{ν} aber abhängig von der Lage des Ortes auf der Verbindungsgerade. Mit den affingeodätischen bzw. den pseudo-affingeodätischen Linien stimmen sie dann und nur dann überein, wenn $Q'^{\nu}_{,\mu} = 0$ ist, d.h. wenn $Q'^{\nu}_{,\mu}$ die Form

$$Q'^{\nu}_{,\mu} = b^{\nu} t_{\mu} + x^{\nu} q_{\mu} - q \mathcal{N}'_{\mu} \quad (q = q_{\mu} x^{\mu}) \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

hat, bzw. wenn (35) und (32) gelten. Im letzten Fall sind also die halb-affingeodätischen, pseudo-affingeodätischen und affingeodätischen (aber nicht die pseudo-geodätischen) Linien identisch. Bei der physikalischen Deutung wird die Abweichung der halb-affingeodätischen von den affingeodätischen Linien als die Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes gedeutet.

Mann kann auf jeder geodätischen Linie einen Bahnkurvenparameter s (Skalar nullten Grades) einführen durch die Definitionsgleichung

$$v'^{\mu} \nabla_{\mu} s = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

die *nur* von der jeweiligen *Richtung* der Kurve abhängt ²⁵⁾. Ist t ein beliebiger Parameter (Skalar nullten Grades) auf der Kurve, so ist $\frac{d'x^{\nu}}{dt} = \beta v^{\nu}$ und das Integral von (36) lautet $s = \int \beta dt$. Aus (36) folgt:

$$d'x^{\nu} = A^{\nu}_k d\xi^k = A^{\nu}_k \frac{d\xi^k}{ds} ds = A^{\nu}_k (v'^{\mu} \partial_{\mu} \xi^k) ds = v'^{\nu} ds, \quad . \quad . \quad (37)$$

sodass man für den Differentialoperator $v'^{\mu} \nabla_{\mu}$ findet:

$$v'^{\mu} \nabla_{\mu} = \frac{\delta}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

²⁴⁾ Sie stimmen in wesentlichen mit den von EINSTEIN und MAYER eingeführten überein; Vgl. auch J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Ueber eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie, diese Proceedings, **34** (1931) 1398—1407.

²⁵⁾ $e \cdot \int \epsilon_{\mu} dx^{\mu}$ (N. B. dx^{ν} selbst, nicht $d'x^{\nu}$) existiert auf jeder Kurve als eine bis auf einen beliebigen Faktor nullten Grades bestimmte homogene Funktion ersten Grades (Exzess = 1).

Mathematics. — *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie.*

II. X_{n+1} mit eingliedriger Gruppe. Von D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE).

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

1. In der vorigen Mitteilung ¹⁾ habe ich gezeigt dass sich die Affingeometrie ²⁾ ganz analog in die allgemeine projektive Differentialgeometrie einordnen lässt wie die gewöhnliche affine Geometrie der in sich ebenen Räumen in die gewöhnliche projektive Geometrie, nämlich durch Auszeichnung eines Feldes von Hyperebenen in den lokalen E_n^* , die der einzigen Bedingung unterliegen dass sie nicht durch den Berührungspunkt gehen. In der vorliegenden Mitteilung werde ich das umgekehrte Problem behandeln: die Einordnung der projektiven Differentialgeometrie in die Affingeometrie mit um Eins erhöhter Dimensionszahl. ³⁾

Bekanntlich entsteht die gewöhnliche projektive Geometrie dadurch aus der affinen von um Eins erhöhter Dimensionszahl, dass man die Geraden durch einen festen Punkt als Elemente eines neuen Raumes betrachtet. In der vorliegenden Note werde ich zeigen dass die Sachlage in der allgemeinen Differentialgeometrie gekrümmter Räume ganz analog ist: die allgemeine projektive Differentialgeometrie lässt sich dadurch aus der Affingeometrie von um Eins erhöhter Dimensionszahl gewinnen, dass man *die Bahnkurven einer beliebigen eingliedrigen Gruppe* (im ebenen Fall: die Homothetiegruppe um den festen Punkt) *als Elemente eines neuen Raumes betrachtet*. Für die benutzten Grundbegriffe und Bezeichnungen sei auf TPZ ⁴⁾ und APD I verwiesen.

2. Die $n + 1$ „homogenen“ Koordinaten x^i einer H_n lassen sich auch als Urvariablen einer X_{n+1} auffassen. Die Gruppe \mathfrak{S}_{n+1} geht dabei über

¹⁾ D. VAN DANTZIG, Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, I Einordnung der Affingeometrie, diese Proceedings 35(1932), zitiert mit APD I.

²⁾ Kurz für Mannigfaltigkeit mit allgemeiner linearer (nicht notwendig symmetrischer) Uebertragung (III A α nach der Klassifizierung von J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül Springer (1924), S 75).

³⁾ Vgl. auch D. VAN DANTZIG, Theorie des projektiven Zusammenhangs n -dimensionaler Räume, Math. Ann. 106 (1932), 400-454, zitiert mit TPZ, S. 408. In dieser Arbeit habe ich die Frage kurz gestreift aber nicht restlos erledigt weil ich dort in der L_{n+1} nicht die allgemeinen Koordinaten Ξ^N eingeführt habe. Für eine spezielle Klasse von projektiven Uebertragungen (Vgl. TPZ, Fussnote 44a) hat J. H. C. WHITEHEAD, The representation of projective spaces, Ann. of M. 32 (1931) 327-360 ein nahe verwandtes Problem behandelt, ohne dass jedoch die oben gestellte Frage als restlos geklärt zu betrachten wäre.

⁴⁾ Es werden die Bezeichnungen des Nachtrags benutzt, unter Weglassung des dort verwendeten *, einige Abweichungen werden in APD I angegeben.

dinatensystems (beide im betrachteten Punkte). Der Operator genügt den folgenden Forderungen:

I. $D_L(X: + Y:) = D_L X: + D_L Y:$ (falls $X:$ und $Y:$ irgendwelche gleichartige Affinoren ¹⁾ sind).

II. Für Produkte und Ueberschiebungen gilt die LEIBNIZsche Differentiationsregel: $D_L X: Y: = (D_L X:) Y: + X: D_L Y:$.

III. Für einen Skalar f ist $D_L f = X f$.

IV. Die LIESche Ableitung eines kontravarianten Vektors ist dem LIESchen Klammersymbol gleich:

$$D_L v^N = [x, v]^N = x^A \partial_A v^N - v^A \partial_A x^N \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Für einen kovarianten Vektor findet man:

$$D_L w_M = x^A \partial_A w_M + w_A \partial_M x^A = \partial_M (w_A x^A) + 2x^A \partial_{[A} w_{M]} \quad . \quad . \quad (6)$$

für einen allgemeinen Affinor:

$$\left. \begin{aligned} D_L X_{M_1 \dots M_s}^{N_1 \dots N_t} &= x^A \partial_A X_{M_1 \dots M_s}^{N_1 \dots N_t} - \\ &- \sum_{j=1}^t X_{M_1 \dots M_s}^{N_1 \dots N_{j-1} A N_{j+1} \dots N_t} \partial_A x^{N_j} + \\ &+ \sum_{i=1}^s X_{M_1 \dots \dot{M}_{i-1} A \dot{M}_{i+1} \dots M_s}^{N_1 \dots N_t} \partial_{M_i} x^A, \end{aligned} \right\} (7)^2$$

und für die Parameter Π_{MA}^N einer affinen Uebertragung

$$D_L \Pi_{MA}^N = x^K \partial_K \Pi_{MA}^N - \Pi_{MA}^H \partial_H x^N + \Pi_{MH}^N \partial_A x^H + \Pi_{HA}^N \partial_M x^H \quad (8)$$

Merkwürdigerweise ist $D_L \Pi_{MA}^N$ ein Affinor, ³⁾ obwohl dies mit Π_{MA}^N selbst nicht der Fall ist, nämlich

$$D_L \Pi_{MA}^N = x^K N_{\dot{K} \dot{A} \dot{M}}^N - \nabla_A P_{\dot{M}}^N \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo

$$P_{\dot{A}}^N = \partial_A x^N + \Pi_{AM}^N x^M = \nabla_A x^N + 2S_{\dot{A} \dot{M}}^N x^M \quad . \quad . \quad (10)$$

und

$$N_{\dot{K} \dot{A} \dot{M}}^N = -2 \partial_{[K} \Pi_{M]A}^N - 2 \Pi_{\Sigma [K}^N \Pi_{M]A}^\Sigma \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

die zu den Π_{MA}^N gehörige Krümmungsgrösse ist.

¹⁾ Mit "Affinoren" sind hier ausnahmslos Affinoren der X_{n+1} , nicht wie in APD I Affinoren der X_n gemeint. Die Punkte stehen für beliebige Indexreihen.

²⁾ Diese Gleichung wird von SLEBODZINSKI als Definition benutzt.

³⁾ Diese Bemerkung, sowie die Beziehung (8) verdanke ich Herrn Professor J. A. SCHOUTEN.

Ein geometrisches Objekt nennen wir *invariant* bei der Transformation \mathfrak{T} falls seine LIESche Ableitung verschwindet. Insbesondere heisst die Uebertragung *invariant* falls

$$D_L \Pi_{MA}^N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

ist. Gleichwertig hiermit ist die Bedingung dass D_L und ∇_M vertauschbar sind.

Bei der erwähnten Interpretation der H_n in einer X_{n+1} mit eingeschränkter Gruppe ergibt sich nun folgendes: Projektoren vom Exzess Null sind bei \mathfrak{T} invariante Affinoren, wie sich durch Nullsetzen der LIESchen Ableitung in den speziellen Koordinaten mit Hilfe der EULERSchen Homogenitätsbedingung sofort ergibt. Allgemein ist ein Projektor X^* vom Exzess ε ein Affinor mit

$$D_L X^* = \varepsilon X^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

($\varepsilon = \text{konstant}$). Wir sagen in diesem Fall, dass X^* bei \mathfrak{T} *relativ-invariant* ist. Die Bedingung, dass Π_{MA}^N den Grad -1 (den Exzess 0) hat, ist mit (12) äquivalent (wie sich durch Ausschreiben der LIESchen Ableitung in den speziellen Koordinaten x^ν sofort ergibt). Einsetzen von (12) in (9) ergibt eine bekannte Formel der projektiven Differentialgeometrie:

$$x^\alpha N_{\alpha\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \nabla_\lambda P_{\cdot\mu}^\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)^1$$

4. Ist umgekehrt in einer X_{n+1} ein *beliebiges* Vektorfeld x^N auf allgemeine Koordinaten \mathfrak{E}^N gegeben, so gibt es immer $n+1$ unabhängige Lösungen der skalaren Gleichung

$$D_L \mathfrak{E} = X \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nennen wir diese \mathfrak{E}^ν ($\iota, \kappa, \dots, \omega = 0, 1, \dots, n$) und wählt man sie als neue Koordinaten, so wird wegen (15)

$$x^\nu = \mathcal{N}_N^\nu x^N = x^N \partial_N \mathfrak{E}^\nu = X \mathfrak{E}^\nu = \mathfrak{E}^\nu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

d. h. die *Bestimmungszahlen* des Vektors x in bezug auf die speziellen Koordinaten \mathfrak{E}^ν sind den *Koordinaten* des zugehörigen „Aufpunktes“ gleich. Aus (16) folgt sofort:

$$\partial_\mu x^\nu = \mathcal{N}_\mu^\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Fasst man nun die ∞^n Bahnkurven der Transformation \mathfrak{T} als Elemente ("Orte" genannt) einer neuen (n -dimensionalen) Mannigfaltigkeit H_n auf, so kann man die $x^\nu = \mathfrak{E}^\nu$ als überzählige ("homogene") Koordinaten in dieser H_n betrachten. Sind nämlich $\mathfrak{E}^{\nu'}$ $n+1$ andre unabhängige Lösungen der Gleichung (15), so ist

$$\mathfrak{E}^\nu \partial_\nu \mathfrak{E}^{\nu'} = x^\nu \partial_\nu \mathfrak{E}^{\nu'} = X \mathfrak{E}^{\nu'} = \mathfrak{E}^{\nu'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

¹⁾ Vgl. TPZ (76), S 422 (76*) S 452, Whitehead l.c. (1.7) S. 334.

d.h. (infolge der EULERSchen Homogenitätsbedingung) dass die \mathcal{E}^v homogen ersten Grades in den \mathcal{E}^v sind. Die $\mathcal{E}^v = x^v$ unterliegen also der Gruppe \mathfrak{S}_{n+1} . (Die VEBLENSchen Koordinaten ξ^v ($\underline{v}, \underline{x}, \dots, \underline{\omega} = 0, 1, \dots, n$) (Vgl. TPZ § 14) erhält man, wenn man für $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ irgend n unabhängige Integrale der Transformation \mathfrak{T} wählt: $X \xi^k = 0$, während ξ^0 der Bahnkurvenparameter ist, definiert durch $X \xi^0 = 1$). Die infinitesimale Transformation \mathfrak{T} führt einen Punkt $\mathcal{E}^v = x^v$ in $\mathcal{E}^v + x^v dt = (1 + dt) x^v$ über; eine endliche Transformation der durch \mathfrak{T} erzeugten Gruppe führt x^v also in einen Punkt über, dessen Koordinaten mit denen des Urbildes x^v proportional sind, d.h. zwei Punkte der X_{n+1} liegen dann und nur dann auf der selben Bahnkurve der Gruppe (gehören dann und nur dann zum selben Ort), wenn sie durch eine Transformation von \mathfrak{T} aus einander hervorgehen. Für einen Affinor $X_{\mu_1 \dots \mu_s}^{v_1 \dots v_t}$ der X_{n+1} , der der Bedingung (13) genügt, wird wegen (7):

$$x^\lambda \partial_\lambda X_{\mu_1 \dots \mu_s}^{v_1 \dots v_t} = (\varepsilon + t - s) X_{\mu_1 \dots \mu_s}^{v_1 \dots v_t}, \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

d.h. der Affinor geht in einen Projektor vom Grade $r = \varepsilon + t - s$, also vom Exzess ε über. (Der allgemeinste in TPZ § 6 betrachtete projektive Zusammenhang entspricht *nicht* dem Fall einer allgemeinen affinen Uebertragung in der X_{n+1} , sondern einer Verallgemeinerung derselben, bei der für bei \mathfrak{T} relativ-invariante Vektoren mit verschiedenem ε je eine Uebertragung definiert ist). Wir nennen den beschriebenen Prozess zur Erzeugung einer H_n aus einer X_{n+1} *Zusammenlegung der X_{n+1} nach dem gegebenen Bahnkurvensystem*. Im Falle nämlich wo die X_{n+1} eine E_{n+1} ist und die Bahnkurven parallele Geraden sind, geht er in den von H. WEYL eingeführten Prozess der "Zusammenlegung einer E_{n+1} nach einer gegebenen Richtung" über.

5. Ein Feld von Hyperebenen t_v (kovarianten Orten) in den lokalen E_n^* der H_n ergibt bei der Deutung in der X_{n+1} ein Feld von n -Richtungen. Die Bedingung, dass die Hyperebene nicht durch den Berührungspunkt geht, besagt, dass die n -Richtung die Richtung der Bahnkurven nicht enthält. Die lokalen n -Richtungen bilden ein bei \mathfrak{T} invariantes und im allgemeinen anholonomes System X_{n+1}^n ¹⁾. Ist $x^M t_M \neq 0$ so kann man x^N als Einspannungsvektor wählen. Die Normierungsbedingung $x^M t_M = x^\mu t_\mu = 1$ ²⁾ entspricht der bekannten „ersten Normierungsbedingung“ ³⁾ für eingebettete Gebilde in einer X_{n+1} und man kann (im Fall wo in der X_{n+1} eine bei \mathfrak{T} invariante lineare Übertragung L_{n+1} gegeben ist) die vollständig bekannte Krümmungstheorie einer L_{n+1}^n in L_{n+1} gänz-

1) Vgl. für die Theorie der anholonomen Systeme J. A. SCHOUTEN, On non-holonomic connexions, diese Proceedings, 31 (1928) 291-299; J. A. SCHOUTEN und E. R. VAN KAMPEN, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde, Math. Ann. 103 (1930) 752-783.

2) Vgl. APD I § 3, (18).

3) Vgl. z. B. J. A. SCHOUTEN, der Ricci-Kalkül, Berlin, J. SPRINGER (1924) S 136.

lich auf die H_n (die dann eine P_n wird) übertragen, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen.

6. Wird eine geodätische Linie der L_{n+1} durch die Gruppe \mathfrak{F} mitgeschleppt, so entsteht eine bei \mathfrak{T} invariante Schar von ∞^1 geodätischen Linien der L_{n+1} (unter Voraussetzung natürlich dass die Uebertragung in der L_{n+1} bei \mathfrak{T} invariant ist), die einer *pseudogeodätischen* Linie¹⁾ der H_n entspricht. Wird ein kontravarianter Vektor der L_{n+1} fortgesetzt in der Richtung seiner Projektion aus x^N auf t_M (anstatt in seiner eigenen Richtung) pseudoparallel verschoben, und wird sodann die so entstandene Kurve durch \mathfrak{F} mitgeschleppt, so entsteht eine bei \mathfrak{T} invariante Schar von ∞^1 Kurven, die einer *halb-affingeodätischen* Linie der H_n entspricht. Diese Definition stimmt im wesentlichen mit der von EINSTEIN und MAYER²⁾ gegebenen überein. Die *pseudo-affingeodätischen* Linien entsprechen ebensolchen Scharen von geodätischen Linien der L_{n+1} , deren Richtung fortwährend in der lokalen n -Richtung liegt, die *affingeodätischen* dagegen einfach den geodätischen Linien des anholonomen Systems L_{n+1}^n selbst.

Die in TPZ § 10 definierten geodätischen Linien der H_n schliesslich entsprechen bei \mathfrak{T} invarianten *totalgeodätischen Flächen* der L_{n+1} , falls solche existieren.

7. Die oben gegebene Deutung einer H_n in einer X_{n+1} mit eingliedriger Gruppe gestattet auch, die Beziehungen zwischen den älteren fünfdimensionalen³⁾ und den neueren vierdimensional-projektiven Relativitätstheorien zu klären. Die X_{n+1} ist hier eine V_5 , in der eine eingliedrige Gruppe gegeben ist. Der einzige Unterschied zwischen fünfdimensionaler und vierdimensionaler Interpretierung der Formeln liegt also darin, ob man die V_5 *vor* oder *nach* der Zusammenlegung betrachtet, d. h. ob man die *Punkte* oder die *Bahnkurven* der V_5 als Raumelemente betrachtet. (Ueberdies treten bei den einzelnen Autoren Unterschiede auf, abhängig von der jeweiligen Lage der Bahnkurven und von einer eventuellen Asymmetrie der Uebertragung). Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo die Uebertragung in der X_5 RIEMANNsch, also symmetrisch ist.⁴⁾

¹⁾ Für die verschiedenen Arten von geodätischen Linien einer projektiv-affinen H_n vgl. APD I § 5.

²⁾ A. EINSTEIN und W. MAYER, Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, Berlin, Sitzungsberichte 25 (1931) 541-557; (für den Fall wo die L_{n+1} eine V_5 ist). Dort ist aber nicht ein anholonomes System von 4-Richtungen in V_5 gegeben, sondern eine V_4 mit lokalen R_5 , die man sich aus einer V_4 in V_5 entstanden denken kann.

³⁾ TH. KALUZA, Zum Unitätsproblem der Physik, Berlin, Sitzungsber. Pr. Ak. (1921) 966-972; O. KLEIN, Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, ZS. f. Physik 37 (1926) 895-906; L. ROSENFELD, L'univers à cinq dimensions et la mécanique ondulatoire, Bull. Ac. Royale Belg. (5) 13 (1927); J. A. SCHOUTEN, Dirac equations in general relativity; 2. Five dimensional theory, Jn. for Math. und Ph. 10 (1931) 272-283, u.a.

⁴⁾ Dieser Fall ist *nicht* mit den sämtlichen physikalischen Forderungen zu vereinbaren. Weil dies aber zur Kennzeichnung des Unterschiedes gegenüber den fünfdimensionalen Theorien unwesentlich ist, wollen wir hier der Einfachheit halber von der Asymmetrie absehen.

Die Bedingung dafür, dass die Uebertragung bei \mathfrak{T} invariant ist, ist dann wegen (9), (10) mit

$$x^K N_{\dot{K} \dot{A} \dot{M}}^N - \nabla_{AM} x^N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

äquivalent. Eine schärfere Forderung ist, dass der Fundamentaltensor G_{AM} der V_5 selbst bei \mathfrak{T} invariant sei. Die Bedingung dafür, nämlich $D \underset{L}{G}_{AM} = 0$ ist wegen (7) mit

$$\nabla_{(A} x_{M)} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

d.i. mit der KILLINGSchen Gleichung äquivalent. Notwendig und hinreichend für die Invarianz von G_{AM} ist also, dass \mathfrak{T} eine infinitesimale *Bewegung* ist, was auch ohne Rechnung leicht einzusehen ist. Wir nehmen weiterhin an, dass der „Geschwindigkeitsvektor“ x_N eine konstante *Länge* hat, und nicht in einer Nullrichtung des Fundamentaltensors fällt.

In einer V_{n+1} bestimmt das Feld x^N eindeutig das Feld $t_N = t x_N$, $t = \text{konst.}$ (nämlich die lokale E_{n+1} senkrecht zur Bahnkurvenrichtung; projektiv: die polare E_{n+1}^* des Berührungspunktes x^N bzgl. der lokalen Quadrik). Massgebend für die Existenz eines elektromagnetischen Feldes ist meistens die Anholonomität des Feldes t_N , bei Normierung von t_N bedingt durch das Nichtverschwinden des Bivektors

$$t_{AM} = \partial_{[A} t_{M]} = \nabla_{[A} t_{M]}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

der bis auf einen konstanten Faktor mit dem elektromagnetischen Bivector identifiziert wird:

$$F_{AM} = f t_{AM}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Ist die KILLINGSche Gleichung (21) erfüllt, so ist

$$t_{AM} = \nabla_A t_M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

und umgekehrt folgt (21) (bei $S_{AM}^N = 0!$) aus (24). Die Bedingung (24) ist deswegen so wichtig, weil sie gestattet die Bewegungsgleichung im elektromagnetischen Felde

$$\frac{\delta i_\nu}{d\tau} = - \frac{e}{mc} i^\mu F_{\mu\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

in die einfachere Form

$$\frac{\delta}{d\tau} \left(i_\nu + \frac{e}{mc} f t_\nu \right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

zu bringen.

In der durch Zusammenlegung entstehenden H_4 wird ausser des projektiven Zusammenhangs (d. i. die RIEMANNsche Uebertragung in der V_5 selbst) wieder eine RIEMANNsche Uebertragung induziert, welche mit der aus der allgemeinen Relativitätstheorie bekannten Uebertragung (welche die geodätische Präzession bedingt) identifiziert wird. In der V_5 inter-

pretiert ist sie nichts anders als die (bei \mathfrak{T} invariante) in die V_5^4 induzierte Uebertragung. Es ist klar, dass letztere nicht euklidisch zu sein braucht, auch wenn die V_5 selbst euklidisch ist. (Das einfachste Gegenbeispiel erhält man schon in R_3 , wenn man für \mathfrak{T} eine infinitesimale Schraubung nimmt). Weil man leicht einsieht, dass der „zweite Fundamentaltensor“ der V_5^4 hier $\nabla_A t_M$, also unter Voraussetzung von (24) mit F_{AM} proportional ist, folgt aus der (auf den Fall einer V_5^4 erweiterten) GAUSSschen Gleichung ¹⁾ dass die RIEMANNsche Uebertragung in einer H_4 welche durch Zusammenlegen einer R_5 nach einer Gruppe von Bewegungen mit konstanter (skalarer) Geschwindigkeit entsteht, dann und nur dann selbst euklidisch ist, wenn das Feld t_N holonom ist. ²⁾

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass die in einem früheren Stadium der Relativitätstheorie oft untersuchte *stationäre* Welt sich ganz analog auf eine V_4 mit eingliedriger Bewegungsgruppe zurückführen lässt. Die Bahnkurven bestimmen dann eine ausgezeichnete Zeitrichtung und sind die Weltlinien ruhender Teilchen. Die durch Zusammenlegung entstehende H_3 ist nichts anders als der gewöhnliche dreidimensionale Raum, als Gesamtheit ruhender Gegenstände unabhängig von der Zeit, nicht als „Momentraum“ betrachtet. Ist überdies das Feld t_N holonom, so ist die Welt *statisch*; in diesem und nur in diesem Fall gibt es zu jeder Zeit einen „Momentraum“, d. h. eine V_3 die auf allen Bahnkurven senkrecht steht.

¹⁾ Vgl. J. A. SCHOUTEN, Ueber nicht-holonyme Uebertragungen in einer L_n , Math. ZS 30 (1929) 149-172; J. A. SCHOUTEN und E. R. VAN KAMPEN, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde, Math. Ann. 103 (1930) 752-783, Formel (128) S. 778.

²⁾ Fussnote bei der Korrektur. In einer eben erschienenen Note, die manche Berührungspunkte mit der unsrigen hat (Sur les transformations isomorphiques d'une variété à connexion affine, Prac Mat.-Fiz. (Warszawa) 39 (1932) 55-62), hat W. ŚLEBODZIŃSKI u. a. die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (12) aufgestellt. Sie besagen, dass $R_{\dot{K}\dot{A}\dot{M}}^N$ und $S_{\dot{A}\dot{M}}^N$ sowie alle ihre kovarianten Ableitungen bei \mathfrak{T} invariant sind.

Mathematics. — *Ueber einige Determinanten.* Von J. POPKEN. (Communicated by J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Satz 1 ¹⁾. *Es sei*

$$P(x, y) = c_{00} + c_{10} x + c_{01} y + \dots + c_{n-1, n-1} x^{n-1} y^{n-1}$$

ein Polynom, das in den beiden Variabeln x und y höchstens vom

¹⁾ Dieser Satz kommt vor in C. W. BORCHARDT, Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante, Werke S. 133-144, und in R. BALTZER, Theorie und Anwendungen der Determinanten, 4-te Aufl. Leipzig 1875, S. 80.

Grade $n-1$ ist, weiter seien $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ irgend $2n$ Zahlen mit

$$X = \prod_{1 \leq s < r \leq n} (x_r - x_s), \quad Y = \prod_{1 \leq s < r \leq n} (y_r - y_s),$$

dann ist die Determinante n -ter Ordnung

$$|P(x_r, y_s)| = X \cdot Y \cdot |c_{h,k}| \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; h, k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Beweis. Die Anwendung des Multiplikationstheorems gibt

$$Y \cdot |c_{h,k}| = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & \dots & y_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0,n-1} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = |a_{h,s}|,$$

mit

$$a_{h,s} = c_{h0} + c_{h1} y_s + \dots + c_{h,n-1} y_s^{n-1} \quad (h, k = 0, 1, \dots, n-1; s = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Wendet man das Multiplikationstheorem zum zweiten Male an, so findet man

$$X \cdot Y \cdot |c_{h,k}| = X \cdot |a_{h,s}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0,n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\ = |\beta_{r,s}|,$$

mit

$$\beta_{r,s} = a_{0s} + a_{1s} x_r + \dots + a_{n-1,s} x_r^{n-1} \quad (h, k = 0, 1, \dots, n-1; r, s = 1, 2, \dots, n),$$

also wegen (1)

$$\beta_{r,s} = (c_{00} + c_{01} y_s + \dots + c_{0,n-1} y_s^{n-1}) + (c_{10} + c_{11} y_s + \dots + c_{1,n-1} y_s^{n-1}) x_r + \\ + \dots + (c_{n-1,0} + c_{n-1,1} y_s + \dots + c_{n-1,n-1} y_s^{n-1}) x_r^{n-1} \\ = P(x_r, y_s) \quad (r, s = 1, 2, \dots, n),$$

so dass Satz 1 hiermit bewiesen ist.

Dieser Satz wird im Folgenden angewendet, wobei für $P(x, y)$ geeignet gewählte Polynome genommen werden. Erstens beweise ich hiermit den folgenden Satz von Dr. J. G. VAN DER CORPUT¹⁾:

Satz 2. Es seien $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2, \dots, y_n$ $3n-2$ Zahlen mit

$$e_{s,r+1} = a_r (y_s - x_r) e_{sr} \quad (s = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, n-1),$$

¹⁾ J. G. VAN DER CORPUT. Over eenige Determinanten, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, eerste sectie, deel 14 No. 3, S. 3 (Stelling I).

dann ist die Determinante $|e_{sr}|$ gleich dem Produkt der Elemente der ersten Kolonne, multipliziert mit

$$a_1^{n-1} a_2^{n-2} \dots a_{n-1} Y,$$

worin

$$Y = \prod_{1 \leq r < s \leq n} (y_s - y_r)$$

ist.

Beweis. Offenbar ist

$$|e_{s,r}| = |a_1 \dots a_{r-1} (y_s - x_1) \dots (y_s - x_{r-1}) e_{s1}| = \left. \begin{aligned} &= |a_1 \dots a_{r-1} (y_s - x_1) \dots (y_s - x_{r-1})| \cdot e_{11} \dots e_{n1} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Man setze

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_{hk} x^h y^k \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (x-2) \dots (x-n)}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-2} a_1 (x-3) \dots (x-n) (y-x_1)}{(n-2)!} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{a_1 \dots a_{n-1} (y-x_1) \dots (y-x_{n-1})}{0!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{(-1)^{n-2} a_1}{(n-2)!} x^{n-2} y + \dots + a_1 \dots a_{n-1} y^{n-1} + R(x, y), \end{aligned}$$

so dass $P(x, y)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ in x und y ist, die Dimension des Polynoms ist $n-1$, während die Glieder von einer Dimension $< n-1$ in $R(x, y)$ zusammengefasst sind.

Da $c_{hk} = 0$ ist für $h + k > n-1$, gilt also

$$|c_{hk}| = (-1)^{1/2 n(n-1)} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-2} a_1}{(n-2)!} \dots (a_1 \dots a_{n-1}) = \left. \begin{aligned} &= \frac{a_1^{n-1} a_2^{n-2} \dots a_{n-1}}{1! 2! \dots (n-1)!} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ausserdem ist, wenn ein leeres Produkt gleich 1 gesetzt wird,

$$|P(r, y_s)| = \left| \frac{(-1)^{n-r} a_1 \dots a_{r-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (r-n) (y_s - x_1) \dots (y_s - x_{r-1})}{(n-r)!} + \dots \right. \\ \left. \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-1} (y_s - x_1) \dots (y_s - x_{n-1}) \right|,$$

und hieraus folgt durch Subtraktion von Kolonnen

$$|P(r, y_s)| = |a_1 \dots a_{r-1} (y_s - x_1) \dots (y_s - x_{r-1})| \quad (r, s = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Nach Satz 1 mit $x_r = r$ ($r = 1, 2, \dots, n$) ist

$$|P(r, y_s)| = X \cdot Y \cdot |c_{hk}|,$$

mit

$$X = 1! 2! \dots (n-1)!,$$

also wegen (3)

$$|P(r, y_s)| = 1! 2! \dots (n-1)! \cdot Y \cdot \frac{a_1^{n-1} a_2^{n-2} \dots a_{n-1}}{1! 2! \dots (n-1)!} = Y a_1^{n-1} a_2^{n-2} \dots a_{n-1}.$$

Nach (4) ist somit

$$|a_1 \dots a_{r-1} (y_s - x_1) \dots (y_s - x_{r-1})| = Y a_1^{n-1} a_2^{n-2} \dots a_{n-1} \quad (s, r = 1, 2, \dots, n),$$

und hieraus folgt wegen (2) Satz 2 unmittelbar.

Satz 3. Es seien m und p zwei natürliche Zahlen, dann ist die Determinante $(mp + 1)$ -ter Ordnung

$$\left| \binom{r+s+m-1}{m} \right|^p = (-1)^{1/2 mp (mp+1)} \left(\frac{(mp)!}{(m!)^p} \right)^{mp+1} \quad (r, s = 1, 2, \dots, mp+1).$$

Beweis. Man betrachte das Polynom vom Grade mp in x und y und von der Dimension mp :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{h=0}^{mp} \sum_{k=0}^{mp} c_{hk} x^h y^k \\ &= (x+y)^p (x+y+1)^p \dots (x+y+m-1)^p \\ &= (x+y)^{mp} + R(x, y) = x^{mp} + \binom{mp}{1} x^{mp-1} y + \dots + y^{mp} + R(x, y), \end{aligned}$$

wo in $R(x, y)$ die Glieder einer Dimension $< mp$ zusammengefasst sind.

Also ist

$$\begin{aligned} |c_{hk}| &= (-1)^{1/2 mp (mp+1)} \binom{mp}{1} \dots \binom{mp}{mp} \\ &= (-1)^{1/2 mp (mp+1)} \frac{((mp)!)^{mp+1}}{(1! 2! \dots (mp)!)^2} \quad (h, k = 0, 1, \dots, mp). \end{aligned}$$

Anwendung von Satz 1 mit $n = mp + 1$ gibt folglich

$$\begin{aligned} |P(r, s)| &= X \cdot Y \cdot |c_{hk}| = (1! 2! \dots (mp)!)^2 \cdot |c_{hk}| \\ &= (1! 2! \dots (mp)!)^2 (-1)^{1/2 mp (mp+1)} \frac{((mp)!)^{mp+1}}{(1! 2! \dots (mp)!)^2} \\ &= (-1)^{1/2 mp (mp+1)} ((mp)!)^{mp+1} \quad (r, s = 1, 2, \dots, mp+1). \end{aligned}$$

Es ist aber

$$P(r, s) = (r+s)^p (r+s+1)^p \dots (r+s+m-1)^p = \left(\frac{(r+s+m-1)!}{(r+s-1)!} \right)^p,$$

also

$$\left| \left(\frac{(r+s+m-1)!}{m! (r+s-1)!} \right)^p \right| = (-1)^{1/2 mp (mp+1)} \frac{((mp)!)^{mp+1}}{(m!)^{p(mp+1)}} \\ (r, s = 1, 2, \dots, mp+1),$$

woraus Satz 3 folgt.

Satz 4. Setzt man

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n) = x^n + S_1^{(n)} x^{n-1} + \dots + S_n^{(n)},$$

wo also die Zahlen $S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \dots, S_n^{(n)}$ die STIRLINGSche Zahlen ersterer Art sind, und weiter

$$S = \prod_{\nu=1}^n S_{\nu}^{(n)},$$

so ist die Determinante $(n+1)$ -ter Ordnung

$$\left| \binom{rs+n}{n} \right| = \frac{(-1)^{1/2 n(n+1)} (1! 2! \dots n!)^2 S}{(n!)^{n+1}} \quad (r, s = 1, 2, \dots, n+1).$$

Beweis. Man betrachte hierzu das Polynom vom Grade n in x und y

$$P(x, y) = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n c_{hk} x^h y^k \\ = (xy+1) \dots (xy+n) = x^n y^n - S_1^{(n)} x^{n-1} y^{n-1} + \dots + (-1)^n S_n^{(n)},$$

also ist

$$|c_{hk}| = (-1)^{1/2 n(n+1)} S_1^{(n)} \dots S_n^{(n)} = (-1)^{1/2 n(n+1)} S.$$

Nach Satz 1 mit $n+1$ statt n ist also

$$|P(r, s)| = X \cdot Y \cdot |c_{hk}| = (1! 2! \dots n!)^2 \cdot (-1)^{1/2 n(n+1)} S \quad (r, s = 1, 2, \dots, n+1).$$

Andererseits ist

$$P(r, s) = (rs+1) \dots (rs+n) = \frac{(rs+n)!}{(rs)!}.$$

Folglich gilt

$$\left| \frac{(rs+n)!}{n! (rs)!} \right| = (-1)^{1/2 n(n+1)} \frac{(1! 2! \dots n!)^2}{(n!)^{n+1}} S,$$

womit Satz 4 bewiesen ist.

Mathematics. — *Measurements of the absorption coefficient for X-rays in the neighbourhood of the L-edges of the elements Pt and Au.* By M. WOLF. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

By several experimenters ¹⁾ measurements of the change of the absorption coefficient for X-rays in passing the *L*-edges of the absorbing element have been performed. It seemed worth while to remeasure both the change of the absorption coefficient at the *L*-edges and the absolute values of the absorption coefficient in this region of wavelengths in order to get some information about the number of dispersion electrons connected with each of the 3 *L*-levels.

The radiation was made monochromatic with a calcite crystal. The absorber was a sheet of the metal under investigation of 9 mm height and 30 mm length, which was put in the X-ray beam so that the emission line was covered for 9 mm by the absorbing screen. The thickness of the screen was determined by weight and measurement of the surface. During the exposition the screen was moved at right angles to the X-ray beam over its full length so that the effect of the variation in thickness was negligible. In the usual manner the blackening scale of the photographic plate was obtained with a rotating disc. Until now the behaviour of the absorption coefficient in the neighbourhood of the *L*-edges has been studied for *Pt* and *Au*. For both elements about twenty emission lines, distributed over the range of wavelength in which the *L*-edges are situated, have been used. For each wavelength about twelve measurements of the absorption coefficient have been carried out.

To calculate the change of the absorption coefficient at the edge it was assumed that, in the comparatively small range of wavelength used in the experiment, the absorption coefficient is proportional to the third power of the wavelength. The values of the absorption coefficient measured on both sides of an edge were extrapolated to the wavelength of the edge. The quotient of the values thus found gives the change of the absorption coefficient in passing the edge. Figure 1 gives a graphical representation of the measurements for *Pt*, for *Au* an analogous figure was made. As is seen from this figure the deviations of the experimental values from a λ^3 -graph

¹⁾ G. KELLSTRÖM, *Zeitschr. f. Phys.* **44**, 269, 1927.
J. BACKHURST, *Phil. Mag.* **7**, 353, 1929.
F. M. UBER, *Phys. Rev.* **38**, 217, 1931.
H. KÜSTNER, *Physik. Zeitschr.* **33**, 46, 1932.

lie always within the limit of experimental error. Table 1 shows the results of the measurements for *Pt* and *Au*.

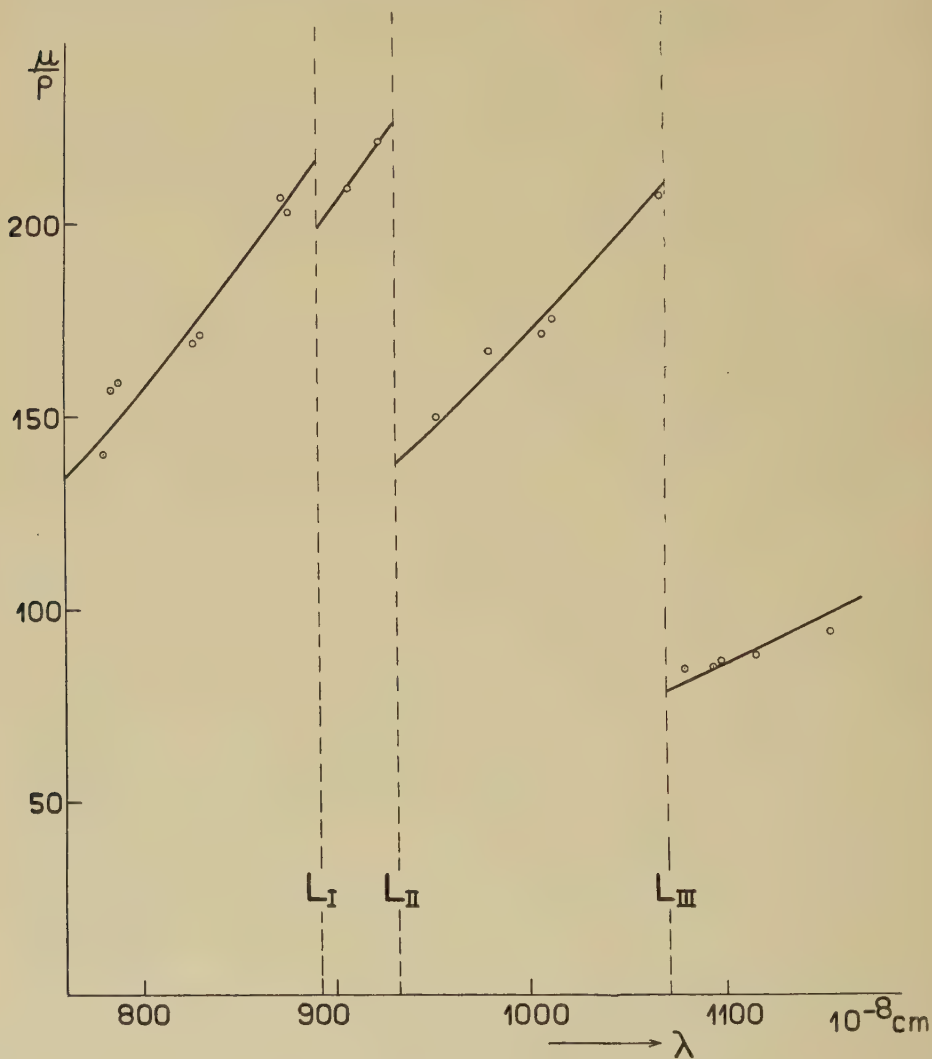


Fig. 1. Absorption coefficient of *Pt* for different wavelengths.¹⁾

TABLE 1.
Absorption coefficient for *X*-rays in the neighbourhood of the *L*-edges for *Pt* and *Au*

	<i>Pt</i>			<i>Au</i>		
	$\frac{\mu_1}{\rho}$	$\frac{\mu_2}{\rho}$	$\frac{\mu_1}{\mu_2}$	$\frac{\mu_1}{\rho}$	$\frac{\mu_2}{\rho}$	$\frac{\mu_1}{\mu_2}$
<i>L</i> _{III}	78	208	2.68	72	196	2.71
<i>L</i> _{II}	138	226	1.64	128	210	1.64
<i>L</i> _I	198	218	1.10	184	202	1.10

¹⁾ In the figure stands 10^{-8} cm instead of 10^{-11} cm.

In table 1 $\frac{\mu_1}{\rho}$ signifies the mass absorption coefficient at the edge extrapolated from the long wavelength side, $\frac{\mu_2}{\rho}$ the value found by extrapolation from the short wavelength side. The change in the absorption coefficient is given by the quotient $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. The changes for the neighbouring elements *Pt* and *Au* are sensibly the same.

In table 2 the values of the changes in the absorption coefficient at the *L*-edges are given as they until now have been found by different authors for various elements.

My values for the *L_{II}*- and the *L_{III}*-edge are a little higher than those taken from other authors for the heavier elements with the exception of

TABLE 2.
Changes in the absorption coefficient for *X*-rays in passing the *L*-edges.

Element	Author	<i>L_I</i>	<i>L_{II}</i>	<i>L_{III}</i>	<i>L_{tot}</i>
<i>Ag</i>	KELLSTRÖM	1.25	1.47	3.17	5.83
<i>Pt</i>	DE BROGLIE	1.4	1.8	2.8	7.1
<i>Pt</i>	BACKHURST	1.247	1.371	2.477	4.23
<i>Au</i>	DAUVILLIER	1.2	1.4	2.5	4.2
<i>Au</i>	BACKHURST	1.259	1.355	2.529	4.31
<i>Hg</i>	ÜBER	1.18	1.39	2.45	4.02
<i>Au</i>	KÜSTNER	1.16	1.36	2.50	3.95*)
<i>Pt</i>	THE AUTHOR	1.10	1.64	2.68	4.83
<i>Au</i>	" "	1.10	1.64	2.71	4.89

*) These values have been calculated from a diagram given by Küstner.

DE BROGLIE's values, which are still higher. With the *L_I*-edge, however, my values are essentially lower. I have the impression that this discrepancy lies outside the limit of experimental error for my values. It is quite possible, that the values for *Ag*, which lies in another region of the periodic system, might differ in an essential way from those for the heavier elements.

With the aid of theoretical considerations on the absorption and dispersion of *X*-rays ¹⁾ it is possible to calculate the number of dispersion electrons in the *L*-levels for the heavier elements from the values of the absorption coefficient in the range of wavelength which contains the

¹⁾ H. A. KRAMERS, *Nature* **113**, 673, 1924.

J. A. PRINS, *Zeitschr. f. Phys.* **47**, 479, 1928.

R. A. HOUSTON, *Phil. Mag.* **2**, 512, 1926.

R. DE L. KRONIG, *Journ. Opt. Soc. Amer.* **12**, 554, 1926.

L -edges under the assumption that the λ^3 -law is valid. The results when using the values of table 1 are as follows :

TABLE 3.
Number of dispersion electrons for the
heavier elements.

L_{III}	L_{II}	L_I	L
2.20	1.69	0.40	4.29

In table 3 the first three columns give the number of dispersion electrons in the three L -levels. The fourth column gives the total number of L -dispersion electrons, which is much smaller than the total number of electrons (8) present in the L -shell. The same has been stated¹⁾ for the K -electrons. According to KRONIG and KRAMERS this is due to the fact, that in the normal atom a great number of the higher orbits are filled up with electrons, so that no absorption processes can occur in which the electron of the corresponding shell makes transitions to those higher orbits.

From the values for the changes in the absorption coefficient at the L -edges of Ag measured by KELLSTRÖM combined with the absolute value of the absorption coefficient in this region given by JÖNSSON the number of L -dispersion electrons for the L -levels of Ag was calculated. The results were as follows :

Number of dispersion electrons for Ag .

L_{III}	L_{II}	L_I	L
1.92	1.22	0.79	3.93

The number of dispersion electrons calculated from the measurements mentioned above is generally somewhat lower than the values calculated for Pt and Au from the reported measurements. For elements with lower atomic number, however, a somewhat higher value should be expected. It therefore seems to me of interest to remeasure the absorption coefficient for Ag in the neighbourhood of the L -edges.

In conclusion I wish to express my thanks to Prof. COSTER for his kind interest and his valuable suggestions.

*Groningen, Natuurkundig Laboratorium
der Rijks-Universiteit.*

¹⁾ J. A. PRINS, l.c.

R. DE L. KRONIG and H. A. KRAMERS, Zeitschr. f. Phys. 48, 174, 1928.

R. A. HOUSTON, l.c.

R. DE L. KRONIG, l.c.

F. K. RICHTMYER, Phil. Mag. 4, 1296, 1927.

Physics. — *La courbe des densités du liquide et de la vapeur saturée et le diamètre rectiligne de l'oxyde de carbone.* Par E. MATHIAS, C. A. CROMMELIN, W. J. BIJLEVELD et PH. P. GRIGG. (Communication N^o. 221b from the KAMERLINGH ONNES Laboratory of the University of Leiden). (Communicated by Prof. W. H. KEESOM).

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

1. L'étude de la courbe des densités du liquide et de la vapeur saturée et du diamètre de l'oxyde de carbone est intéressante parce que cette substance a une température critique basse ($-140^{\circ}.21$ C.) et puis parce que les déterminations effectuées jusqu'ici ont un caractère plus ou moins préliminaire ¹⁾.

Cette étude fait suite à une série de travaux sur les diamètres de l'oxygène, de l'argon, de l'azote, de l'hydrogène, du néon, de l'hélium et de l'éthylène, dont nous avons successivement entretenu l'Académie.

2. Les appareils dont nous nous sommes servis, étaient à peu près les mêmes que dans nos recherches antérieures, auxquelles nous renvoyons pour les questions de détail. Comme liquide dans le cryostat nous avons employé:

- 1^o. l'éthylène pour les températures entre le point critique et -160° C.;
- 2^o. le méthane pour les températures entre -160° C. et -183° C.;
- 3^o. l'oxygène pour les températures inférieures à -183° C.

Les températures ont été mesurées à l'aide de deux thermomètres à résistance de platine, comparés directement au thermomètre d'hélium.

L'oxyde de carbone, avec lequel nous avons expérimenté, a été préparé par l'action de l'acide sulfurique dilué sur le formiate du sodium, dans un appareil entièrement en verre. Les traces d'impuretés, que le gaz, ainsi préparé, contenait encore (vapeurs d'eau et de l'acide), furent éloignées en refroidissant le gaz à -90° (alcool refroidi par l'air liquide). Nous avons admis pour le poids d'un litre d'oxyde de carbone dans les conditions normales le nombre de RAYLEIGH = 1 gr. 2504.

3. Dans le tableau suivant nous avons réuni les nombres trouvés pour les densités ρ_{liq} et ρ_{vap} du liquide et de la vapeur saturée à la même température (T = temp. abs. Kelvin, θ = temp. échelle Celsius) et pour l'ordonnée y du diamètre, observée et calculée.

¹⁾ E. C. C. BALY et F. G. DONNAN, Journ. Chem. Soc. 81, 902, 1902. E. CARDOSO, Journ. d. Chim. phys. 13, 312, 1915.

T	θ	ρ_{liq}	ρ_{vap}	y_{obs}	y_{calc}	$y_{obs}-y_{calc}$
[131.36	— 141.63	0.42200	0.19392	0.30796	0.30370	+ 0.00426] ²⁾
130.83	— 142.26	0.43365	0.18462	0.30912	0.30490	+ 0.00422
130.53	— 142.56	0.44026	0.17767	0.30896	0.30547	+ 0.00349
129.78	— 143.31	0.45640	0.16357	0.30998	0.30691	+ 0.00307
127.79	— 145.30	0.49190	0.13601	0.31395	0.31071	+ 0.00324
125.58	— 147.51	0.52083	0.11607	0.31845	0.31494	+ 0.00351
120.88	— 152.21	0.56582	0.08202	0.32392	0.32392	—
109.03	— 164.06	0.65262	0.04014	0.34638	0.34658	— 0.00020
107.59	— 165.50	0.66168	0.03681	0.34924	0.34934	— 0.00010
103.48	— 169.61	0.68560	0.02824	0.35692	0.35719	— 0.00027
100.91	— 172.18	0.69953	0.02389	0.36171	0.36211	— 0.00040
94.14	— 178.95	0.73408	0.01422 ¹⁾	0.37415	0.37505	— 0.00090
90.26	— 182.83	0.75446	0.01019	0.38232	0.38247	— 0.00015
87.13	— 185.96	0.76904	0.00774	0.38838	0.38845	— 0.00007
82.23	— 190.86	0.79086	0.00477	0.39782	0.39782	—
[78.01	— 195.08	0.80640	0.00296	0.40468	0.40589	— 0.00121] ²⁾
73.55	— 199.54	0.82554	0.00171	0.41362	0.41442	— 0.00080
68.12	— 204.97	0.84714	0.00080	0.42397	0.42480	— 0.00083

Les valeurs calculées de l'ordonnée du diamètre, sont données par la formule

$$y = 0.03290 - 0.0019120 \theta$$

Le coefficient angulaire du diamètre est donc

$$\alpha = - 0.0019120.$$

A la température critique $-140^{\circ}.21$ C³⁾ le diamètre rectiligne donne pour la densité critique

$$\rho_k = 0.3010$$

¹⁾ Les valeurs des densités de la vapeur saturée au dessous de -172.18° C. ont été calculées à l'aide de l'équation d'état.

²⁾ Les deux point entre [] sont d'une précision un peu inférieure à celle du reste.

³⁾ C. A. CROMMELIN, W. J. BIJLEVELD et E. G. BROWN, Proc. Ac. Sc. Amsterdam, 34, 1314, 1931; Leiden Comm. No. 217b.

⁴⁾ CARDOSO l. c. donne pour la densité critique 0.3110.

Le coefficient critique est :

$$K_{4d} = \frac{RT_k}{p_k v_k} = 3.395.$$

T_k = température critique absolue.

p_k = pression critique en atmosphères internationales, voir 34.529 atm.

v_k = volume critique.

R = constante des gaz.

4. Les déviations du diamètre ne sont pas aussi petites que celles pour l'hydrogène et pour le néon, car elles sont quelquefois de l'ordre de grandeur de 1 pour 100, comme nous les avons trouvées antérieurement pour l'azote et pour l'éthylène par exemple. Cependant on peut dire que l'oxyde de carbone obéit sensiblement à la loi du diamètre rectiligne.

Les déviations ont le caractère systématique, que nous avons déjà rencontré dans d'autres substances, par exemple l'argon et l'éthylène; c'est-à-dire que le diamètre expérimental est légèrement concave vers l'axe des températures au voisinage du point critique et légèrement convexe, au contraire, aux températures les plus basses.

Sommaire.

Les auteurs ont d'abord préparé une quantité suffisante de CO très pur. Puis ils ont mesuré les densités du liquide et de la vapeur saturée entre le point triple et le point critique. À l'aide de ces valeurs ils ont pu calculer le diamètre rectiligne de CAILLETET et MATHIAS et la densité critique.

Astronomy. — *On the structure and internal motion of the gaseous disc constituting the original state of the planetary system.* By H. P. BERLAGE Jr., Meteorological Observatory, Batavia. (Communicated by Prof. H. A. KRAMERS.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

In this paper I endeavour to show not only that a thin gaseous disc, rotating with variable angular velocity about the sun, constitutes a possible embryo of the planetary system, but also that some present features of the system leave hardly any doubt that it really once evolved from such a gaseous disc.

Consider a perfectly gaseous atmosphere rotating non uniformly about an axis through the sun. Because the distribution of mass in the solar system is such that only one part in 700 is concentrated in the planets, ROCHE's model of a nucleus surrounded by a massless envelope is

applicable, so that the potential at any point of the atmosphere is Newtonian.

Let r denote the distance of a volume element from the axis of rotation, h its height above or below the equatorial plane, p and ρ gas pressure and density, M the mass of the sun, f the constant of gravitation, ω the angular velocity of an element of the nebula, then the two fundamental equations of equilibrium become

$$\frac{fMh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial h} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{fMr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r \quad \dots \quad (2)$$

Introducing the gasequation

$$p = R\rho T \quad \dots \quad (3)$$

and integrating (1), we obtain provisionally

$$\lg p = \lg p_e - \frac{fM}{R} \int_0^h \frac{hdh}{T(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad \dots \quad (4)$$

A suffix e refers to the equatorial plane. From (2) and (3) follows

$$\frac{fMr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} + RT \frac{\partial \lg p}{\partial r} = \omega^2 r \quad \dots \quad (5)$$

Differentiating (4) with respect to r and substituting the resulting expression in (5), we get

$$\frac{T}{T_e} \frac{fM}{r^2} + RT \frac{d \lg p_e}{dr} + fMT \int_0^h \left(h \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial h} \right) \frac{dh}{T^2 (r^2 + h^2)^{3/2}} = \omega^2 r \quad \dots \quad (6)$$

In order to simplify the problem, let us first suppose the temperature in the solar nebula to be a function of the distance from the centre only. In this case the third term on the left side of (6) reduces to 0, so that we remain with

$$\frac{T}{T_e} \frac{fM}{r^2} + RT \frac{d \lg p_e}{dr} = \omega^2 r \quad \dots \quad (7)$$

This is a rather general case. Without sacrificing the most important aspects of the problem, we may examine the case of isothermy $T = T = T_i$. In this case we have, after elimination of p_e

$$\frac{fM}{r^2} + \frac{RT_i}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} = \omega^2 r \quad \dots \quad (8)$$

From the equations (7) and (8) we learn that only in the case of isothermy our nebula possesses the well known property of freely rotating masses, *that the angular velocity ω is a function of the distance r from the axis of rotation only*. From (4) we then get

$$p = p_e e^{-\frac{fM}{RT_i} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right]} \quad (9)$$

So we also have

$$\varrho = \varrho_e e^{-\frac{fM}{RT_i} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right]} \quad (10)$$

Considering (10) and its finite limiting value

$$\varrho = \varrho_e e^{-\frac{fM}{RT_i r}} (h = \infty) \quad (11)$$

it is exceedingly interesting to remark that our solar nebula behaves morphologically like a whirl in infinite space filled with matter, as DESCARTES conceived it. Yet, KANT was perfectly right, when he believed his nebula, after concentration, to be shaped like a thin flat disc. To prove this, let us follow the indirect way, which is the simpler, and assume that we are practically free to take into account only that part of the mass, which is contained within very narrow limits of h and ignore the remaining part, although it is not negligible, but even infinite.

For $h \ll r$ (10) reduces to

$$\varrho = \varrho_e e^{-\frac{fM}{2RT_i} \frac{h^2}{r^3}} \quad (12)$$

To fix the ideas, let us suppose our nebula to consist of air at a temperature $T_i = 23.2^\circ$ absolute. Then, with $R = 2.87 \times 10^6$, $f = 6.67 \times 10^{-8}$, $M = 2.00 \times 10^{33}$ c.g.s., we get

$$\varrho = \varrho_e e^{-10^{18} \frac{h^2}{r^3}} \quad (13)$$

Whether we are allowed to speak of a disc depends upon the drop of density in axial direction, that is, upon what fraction is represented by the exponential factor. The latter increases with increasing r . Let us therefore substitute in (13) the distance of Neptune from the sun, or $r = 4.5 \times 10^{14}$ cm. We then obtain

$$\varrho = \varrho_e e^{-2220 \left(\frac{h}{r} \right)^2} = \varrho_e \cdot 10^{-1000 \left(\frac{h}{r} \right)^2} \quad (14)$$

The density represented by (14) drops to a value of only 10^{-10} times the density in the equatorial plane, at a distance as small as $h = 0.1 r$. In other words, *if a solar nebula has ever existed, it has been a thin disc indeed at least as far as Neptune*. Ignoring (10) and applying (12)

throughout is a procedure comparable with neglecting the totality of interstellar matter, when discussing the mass distribution in the solar system. Even when computing with the aid of (12) the total mass of the nebula

$$m = 4\pi \int_0^{\infty} r \varrho_e dr \int_0^{\infty} e^{-\frac{fM}{2RT_i} \frac{h^2}{r^3}} dh, \quad (15)$$

and its moment of momentum

$$\Theta = 4\pi \int_0^{\infty} r^3 \omega \varrho_e dr \int_0^{\infty} e^{-\frac{fM}{2RT_i} \frac{h^2}{r^3}} dh \quad (16)$$

we do not commit any fundamental error. On the contrary, we obtain the advantage of skimming off the mass of the solar nebula proper from an infinite material interstellar background, which practically exists, but does not interest us in planetary questions.

Integrating (15) and (16), we get

$$m = (2\pi)^{3/2} \left(\frac{RT_i}{fM} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} r^{3/2} \varrho_e dr \quad (17)$$

and

$$\Theta = (2\pi)^{3/2} \left(\frac{RT_i}{fM} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} r^{5/2} \omega \varrho_e dr \quad (18)$$

As the pressure gradient in our gaseous disc is slight,

$$r^{3/2} \omega = (fM)^{1/2} \quad (19)$$

approximately and (18) becomes

$$\theta = (2\pi)^{3/2} (RT_i)^{1/2} \int_0^{\infty} r^3 \varrho_e dr \quad (20)$$

A curious property of this relation is, that the solar mass M has dropped out. There is nothing trivial in this fact. It proves that on the basis of equilibrium alone no relation can be established between the solar mass and the moment of momentum of the planetary system. The puzzling problem, why the ratio of the planetary and solar masses does not in the least conform to the distribution of the moments of momentum, must find its solution along other lines, which I do not intend to pursue here.

Since the density distribution in the equatorial plane must be known, if we want to obtain a complete solution of our problem of the structure and motion of the disc, let us try to get, if possible, some general information about this distribution. If any relation exists between density and solar

distance, it may be derived from the influence of viscosity. Viscosity acts on an infinitesimal ring, in the plane of symmetry, of radius r and density ρ_e with a tangential force proportional to

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \rho_e \frac{d\omega}{dr} \right) \dots \dots \dots (21)$$

Since the disc must be looked upon as the product of a secular condensation process, it naturally tends to a configuration continually recreating its fundamental properties, as contraction progresses. As this seems best warranted by homologous contraction in the plane of symmetry, we arrive at the question, when viscosity generates homologous contraction. This occurs only if (21) is proportional to the momentum of the ringmatter. Consequently, we may anticipate the approximate validity of a relation of the form

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \rho_e \frac{d\omega}{dr} \right) = \frac{3}{2} a \rho_e \omega r \dots \dots \dots (22)$$

a factor $\frac{3}{2}$ being added to the constant of proportionality a , because it simplifies the following formulae. As (19) also holds approximately, we get

$$\frac{d}{dr} (\rho_e r^{-1/2}) = -a \rho_e r^{-1/2} \dots \dots \dots (23)$$

or,

$$\rho_e = c r^{1/2} e^{-ar} \dots \dots \dots (24)$$

c being a constant. Let us label this case, for identification purposes, with the name of *approximate case*. It is characterized by the fact that the density in the equatorial plane of the disc does not decrease monotonously with increasing r , as we might have superficially expected, but increases first and only decreases asymptotically to zero after having passed through a maximum.

Substituting (24) in (17) and (18), we obtain

$$m = (2\pi)^{3/2} \left(\frac{RT_i}{fM} \right)^{1/2} c \int_0^\infty r^3 e^{-ar} dr \dots \dots \dots (25)$$

$$\theta = (2\pi)^{3/2} (RT_i)^{1/2} c \int_0^\infty r^{31/2} e^{-ar} dr \dots \dots \dots (26)$$

or

$$m = (2\pi)^{3/2} \left(\frac{RT_i}{fM} \right)^{1/2} c \cdot 6a^{-4} \dots \dots \dots (27)$$

$$\theta = (2\pi)^{3/2} (RT_i)^{1/2} c \cdot \frac{105}{16} \pi^{1/2} a^{-41/2} \dots \dots \dots (28)$$

Since m and θ are given quantities, we might determine both c and a if we knew R and T_i . However, we may determine at least a without knowing either R or T_i , for

$$\frac{\theta}{m} = \frac{105}{96} \left(\frac{f M \pi}{a} \right)^{1/2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (29)$$

The empirical value of this quotient, derived from the actual planetary system, is

$$1.02 \times 10^7 (f M)^{1/2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (30)$$

from which

$$a = 3.63 \times 10^{-14} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (31)$$

follows.

A very suggestive consequence is, that the highest density in the disc occurred at a distance

$$r = \frac{1}{2a} = 1.38 \times 10^{13} \text{ cm} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (32)$$

from the sun. This corresponds to 0.93 or nearly 1 astronomical unit. This means that the highest density was found along a circle coinciding almost with the actual orbit of the earth. So the question arises, whether it is a result of pure chance that the earth actually possesses the highest density among all planets. Let us therefore compare the following sequence of planetary densities¹⁾ with the density distribution in our approximate case more thoroughly.

Mercury	3.58
Venus	5.02
Earth	5.53
Mars	4.09
Jupiter	1.34
Saturn	0.67
Uranus	1.47
Neptune	1.33

These values have been plotted against solar distance in figure 1 and joined by a smooth curve, which will be called the planetary density curve. The dotted curve represents (24) in arbitrary units. There is a striking parallelism between the two curves. It is true that the planetary density curve, after passing through a minimum, rises to a secondary maximum. But we know that (24) could not reveal anything more than the general trend of the density distribution and this it does with unexpected fidelity. Therefore, reversing the argumentation, it seems rational to assume that the actual density curve of the planets is very nearly *representative* of the original density distribution in the gaseous disc.

¹⁾ C. A. VAN DEN BOSCH, Dissertation Utrecht, 1926.

Since the atomic weight is the only variable which enters into the density of solid bodies as well as into the density of gases, this relation may be due to a variability of the chemical composition of the disc with solar distance, but, for the moment, I prefer to avoid the resulting complications of the above theory. For, assuming a variability of mean atomic weight, we would be obliged to assume a variability of R , the gas constant. Moreover it would almost certainly imply a variability of the temperature too, which we supposed constant and perhaps even a variability of, say, the constant of gravitation, because some elements are and some are not notably affected by radiation pressure. Surely there are so many variables at hand that it would be an easy matter to suit them into a consistent scheme explaining a definite relation between the actual density of the planets and the original density of the gaseous disc. But I doubt, whether this relation would not remain too weakly founded, if it did not prove *remarkably successful*, when applied to the interpretation of two outstanding features of the actual system.

In the first place, (8) shows us that, where ρ_e increases with r , the angular velocity is larger than the Keplerian velocity, whereas, where ρ_e decreases with r , the angular velocity is smaller than the Keplerian velocity. Where the density attains a maximum or minimum the velocity is Keplerian. The cosmogonic consequences of this fact are evident. Each planet will, during its condensation, adjust its orbit to the moment of momentum, which its matter possessed, when it was still part of the disc. A planet born within a zone of outward increasing density will draw away from the sun, a planet born within a zone of outward decreasing density will draw nearer to the sun. But graphical interpolation of the planetary density curve of figure 1, revealed a first maximum at the proper distance of the earth, a

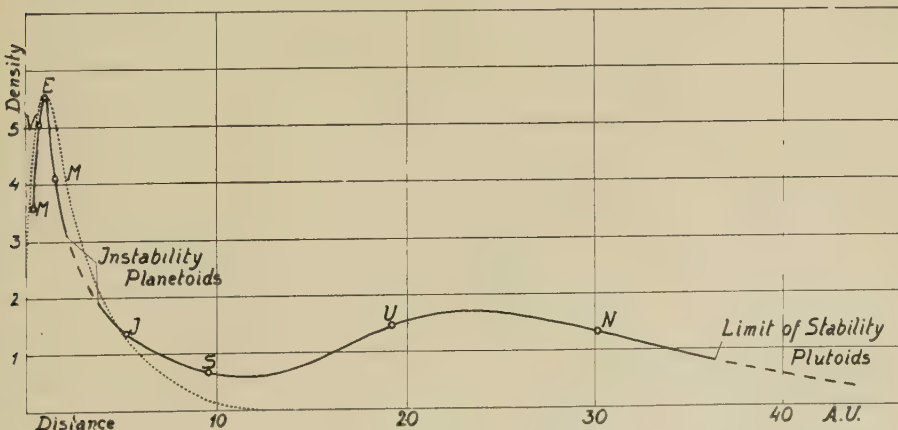


Fig. 1

minimum between Saturn and Uranus, a second maximum between Uranus and Neptune. Thus, *postulating that the distances from the sun where the planets were born, strictly obey some law*, we should find that Mercury,

Venus and Uranus revolve too far away from the sun, Mars, Jupiter, Saturn and Neptune too near, whereas the distance Sun-Earth, in which the other distances are expressed as a unit, remains constant.

Let us express the law of the planetary distances by a simple exponential function, $r = r_0 p^n$ ($n = 0, 1, 2$, etc.), which is BODE's law, omitting the irrelevant additive constant. Then, nearest agreement is obtained with the ratio $p = 1.79$, as may be shown by the following table, which contains the distances of the planets from the sun in astronomical units.

	M	V	E	M	J	S	U	N
observed	0.39	0.72	1	1.52	5.20	9.55	19.22	30.11
computed	0.31	0.56	1	1.79	5.73	10.24	18.33	32.77
quotient	1.26	1.29	1	0.85	0.91	0.93	1.05	0.92

The last row contains the quotients of the observed and computed values. It shows us that as a matter of fact Mercury, Venus and Uranus are placed too far away, whereas Mars, Jupiter, Saturn and Neptune are placed too near.

On the one hand, this confirms our supposition that an exponential law has ruled the distances of the planets from the sun. I even dare say, in contradiction to suggestions from several sides, that *an exponential law is much more strictly obeyed, than has ever been believed*. It requires careful consideration, because it surely touches the root of the problem of the evolution of the solar system and may lead us to the solution of the fundamental question, as to which agency once transformed KANT's disc into the rings of LAPLACE¹⁾. On the other hand, we could hardly conceive of any stronger evidence of a gaseous disc having constituted the embryo of the planetary system.

The second question, which arises, is the question of stability. What is the condition that a gaseous equilibrium configuration, represented by

$$\frac{fM}{r^2} + \frac{RT_i}{\varrho_e} \frac{d\varrho_e}{dr} = \omega^2 r \quad \dots \quad (8)$$

be stable? This is of course too complicated a problem to be solved in its integral form. My impression is that the most general criterion is the following. The gradient of angular velocity in radial direction should be less steep than the gradient, which follows from the formula

$$\omega r^2 = \text{constant},$$

expressing the preservation of moment of momentum. For, in this case only, every mass element, which, after some arbitrary radial displacement,

¹⁾ Versuch einer Entwicklungsgeschichte der Planeten, Ergänzungsheft zu Gerlands Beiträge zur Geophysik, **17**, 1927; On the electrostatic field of the sun due to its corpuscular rays, Proceedings Amsterdam, **33**, 1930, p. 614; On the electrostatic field of the sun as a factor in the evolution of the planets, Proceedings Amsterdam **33**, 1930, p. 719.

takes up a new circular orbit, will move with such a velocity that it tends to return to its former position.

Multiplying (8) by r^3 , we get

$$fMr + RT_i \frac{r^3}{\varrho_e} \frac{d\varrho_e}{dr} = \omega^2 r^4. \quad (33)$$

Differentiating (33) with respect to r , the condition of stability

$$fM + RT_i \frac{d}{dr} \left(\frac{r^3}{\varrho_e} \frac{d\varrho_e}{dr} \right) > 0 \quad (34)$$

immediately follows. The stability of the solar disc depends upon the radial density distribution in the equatorial plane. If the equation

$$fM + RT_i \frac{d}{dr} \left(\frac{r^3}{\varrho_e} \frac{d\varrho_e}{dr} \right) = 0 \quad (35)$$

has real positive roots, they represent the radii of the boundaries of zones of stability and instability. Within the former zones the motion of the gas is laminar, within the latter zones it is turbulent.

For a first orientation in this matter of stability and instability, let us return to our approximate case (24). Substituting (24) in (8), we get

$$fM + r \left(\frac{1}{2} - ar \right) RT_i = \omega^2 r^3 \quad (36)$$

whereas the limit of stability follows from (35)

$$fM + r(1 - 3ar) RT_i = 0 \quad (37)$$

(37) has always one real positive root. The radius

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 + 12a(fM)(RT_i)^{-1}}}{6a} \quad (38)$$

divides the disc into an inner stable zone and an outer instable zone. We could localize the boundary, if we knew R and T_i . This being not the case, let us draw a conclusion, which is independent of these data.

Denoting the value of the angular velocity at the boundary by ω_b , the Keplerian value at the same distance by ω_k , we find by elimination of RT_i from (36) and (37)

$$\frac{\omega_b^2}{\omega_k^2} = \frac{2ar - \frac{1}{2}}{3ar - 1} \quad (39)$$

Suppose a planet to be born at the boundary. With the generation of a planet from the disc it automatically adjusts its actual distance r_a to the value ω_b , whereas we shall call r_t the theoretical distance corresponding with the Kepler value ω_k . We then get evidently

$$\frac{r_a}{r_t} = \frac{2ar - \frac{1}{2}}{3ar - 1} \quad (40)$$

Suppose, instability sets in on the descending branch of the density curve. Then $2ar > 1$ and the quotient (40) is limited between 1 and $\frac{2}{3}$. We then

may observe our planet down to two thirds of its theoretical distance from the sun at most, but if so, irregularities in the behaviour of the planets beyond this hypothetical one are to be expected.

Fortunately, an example of this approximate case immediately presents itself. The great bulk of planetoids between Mars and Jupiter, on the first descending branch of the density curve, sets in at about 2.0 A.U., that is at 0.63 of their theoretical distance 3.20 A.U. This strongly suggests that the riddle of their origin can be solved in a remarkably simple manner. *The planetoids were born within a zone of instability and turbulence in the gaseous disc.* This fact explains their not being united in one body, as well as their puzzling dispersity and excentricity.

The inner radius of this zone of instability must have been smaller than 3.20 A.U. If the equatorial density had rigorously followed the function (24), with its one maximum, the disc would have been unstable from the inner limit up to infinity. The planetary density curve, however, rises a second time beyond Saturn. Consequently an outer limit to the zone of instability might have been anticipated. The outer radius has evidently exceeded 3.20 A.U., but it must have been smaller than 5.73 A.U. the theoretical distance of Jupiter.

As instability occurred on the first descending branch of the density curve, we may expect it to occur once more on the second descending branch of the density curve, beyond the density maximum between Uranus and Neptune, *and it evidently did occur.* For, does not the recent discovery of the excentric Pluto make it extremely probable that astronomers have got hold of the first member of a new family of planetoids, which might be well called plutoids?

The mean distance of Pluto from the sun is 39.9 A.U., that is 0.68 of its theoretical distance 58.7 A.U., again strikingly near to the theoretical limit of two thirds. It is dubious, whether or not the density of the planets increases a third time in outward direction. It is therefore dubious, whether the second zone of instability, where the plutoids originated, extends to infinite distance, or that there is a chance for some more regular planets to pursue still larger orbits (See figure 1).

I think it rather improbable that big transneptunian planets should exist. It is far more probable that we have to look at the comets as messengers descending to the sun from the outmost instable and turbulent portions of the solar nebula, where it merged into the interstellar medium.

Concluding this paper I should like to emphasize that we have found such convincing evidence of a gaseous disc having constituted the original state of our planetary system that I feel obliged to express doubt, whether the Tidal Theory of the origin of this system will remain any longer a serious competitor besides some other theory, which follows the line of thought of DESCARTES, KANT and LAPLACE.

The Hague, March 1932.

Chemistry. — *Lyotrope Zahlen und Ioneneigenschaften.* Von E. H. BÜCHNER, ANDR. VOET und E. M. BRUINS. (Communicated by Prof. A. F. HOLLEMAN.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

1. Es hat sich als möglich erwiesen, Anionen auf Grund ihrer aussalzenden Wirkung auf lyophile Kolloiden eine lyotrope Zahl N als Mass ihres lyotropen Verhaltens zuzuerkennen¹⁾. Bei diesen Experimenten konnte die Wirkung des Kations mit Hilfe mathematischer Erwägungen eliminiert werden. Im Folgenden wird nachgewiesen werden:

1. dass für die Kationen eine analoge Reihe als Massstab für ihre lyotrope Wirkung aufgestellt werden kann, mittels deren Hilfe auf verschiedenen Gebieten lineare Beziehungen in Erscheinung treten;

2. dass die gefundenen Zahlen N der Anionen auf verschiedenen, von der lyotropen Reihe beherrschten Gebieten ihre Gültigkeit behalten.

A. Kationen.

2. Numerische Festlegung der Kationenreihe.

Als Ausgangspunkt wählen wir Koagulationsexperimente hydrophober Solen. Da wir für unsere quantitativen Betrachtungen scharfe Bestimmungen benötigen, kommen für Bearbeitung allein diejenigen Versuche in Betracht, bei denen die Koagulierung durch Zählung der Teilchen verfolgt ist.

Wir wählen die Versuche P. TUORILA's²⁾ über die Koagulierung von Goldsolen mit LiCl, NaCl, KCl, RbCl und CsCl. Fig. 1 zeigt den Zusammenhang zwischen der Farbgleichheit (Fbg) der Lösung, gemessen mit dem BJERRUMSchen Keil und der Zeit in Minuten.

Aus TUORILA's Messungen (Tabelle 1) folgern wir, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Fbg und der Teilchenanzahl v_t per ccm besteht:

$$Fbg = A v_t + B \quad (\text{Fig. 2})$$

TABELLE I.

Fbg = 7.8	$v_t = 6.81 \cdot 10^8$	Fbg = 13.5	$v_t = 3.00 \cdot 10^8$
„ = 10.5	„ = 4.75. „	„ = 15.5	„ = 1.73. „
„ = 12.3	„ = 3.66. „	„ = 16.0	„ = 1.40. „

¹⁾ E. M. BRUINS, Diese Proceedings, 35, 107, 1932.

²⁾ Koll. Beih. 22, 191 (1926).

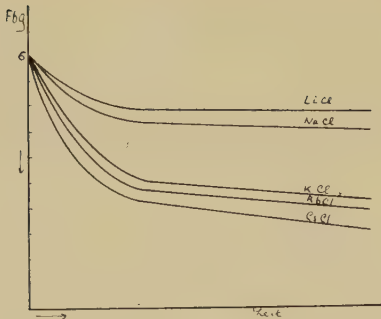


Fig. 1

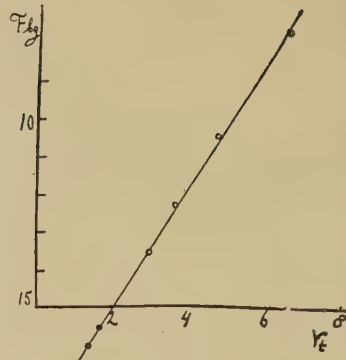


Fig. 2

Wir können somit die Fbg als Kriterium für die v_t akzeptieren. Nach der Koagulationstheorie von SMOLUCHOWSKI's gilt für v_t die Beziehung :

$$v_t = \frac{v_0}{1 + \frac{t}{T_v}}$$

wobei T_v eine Konstante ist.

Hieraus folgt, dass die v_t , t - (also auch die Fbg , t -)Kurven Hyperbeln sind.

Eine numerische Festlegung der Reihe der Kationen wird nun durch die Bemerkung erreicht, dass die (Fbg, t) -Kurven für LiCl, NaCl, KCl, RbCl und CsCl für gleiche Konzentration ein System affiner Hyperbeln bilden.

Wenn man nun, berücksichtigend, dass $Fbg = 6$ den Beginnpunkt der Figur darstellt, die $(Fbg - 6)$ für verschiedene, doch konstant gewählte Zeiten, z.B. $t = 2'$, $t = 4'$, $t = 6'$ als Kartesische Koordinaten auffasst, erhält man ein System von Geraden durch den Ursprung (Fig. 3, Tabelle 2).

TABELLE II.

Zeit	Li	Na	K	Rb	Cs
2'	7.6	8.2	10.0	10.5	11.2
4'	8.4	9.0	11.6	12.1	12.9
6'	8.6	9.4	12.3	12.9	13.7

Man kann nun das Verhältnis der zu einer bestimmten Zeit gehörenden Zahlen $(Fbg - 6)$ als charakteristisch für die Wirkung der Kationen auffassen.

Wählen wir nun als lyotrope Zahl T für $Cs = 60.0$ und $Na = 100.0$, dann folgt hieraus : $Rb = 69.5$, $K = 75.0$, $Li = 105.2$.

Aus Fig. 4 ersieht man den erforderlichen linearen Zusammenhang zwischen Fbg und T für verschiedene Zeiten.

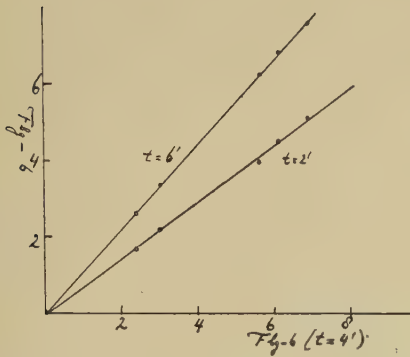


Fig. 3

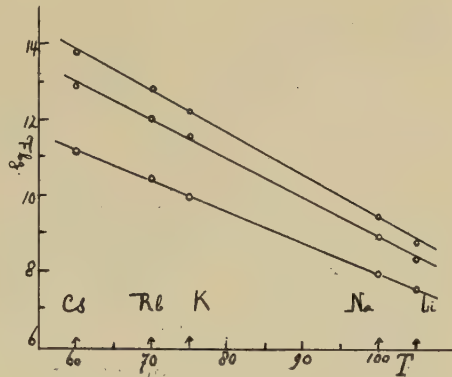


Fig. 4

Mathematisch folgt nun aber aus der Tatsache dass diese Hyperbeln untereinander affin sind, dass bei konstant gewählten Konzentrationen die zur Abnahme der Teilchenanzahl (Fbg) zu einer bestimmten Fraktion der ursprünglich vorhandenen Anzahl benötigten Zeiten, auch in linearem Zusammenhang mit den Zahlen T stehen müssen.

Es zeigt sich nun, dass die (t, c) Kurven für $Fbg = \text{konstant}$ ebenfalls ein System affiner Hyperbeln¹⁾ (Fig. 5) mit numerisch gleichen Beziehungen bilden, woraus man schliessen kann, dass der Flockungswert, definiert als diejenige Konzentration, bei der in einer bestimmten Zeit die Teilchenanzahl bis zu einer bestimmten Fraktion zurückgegangen ist, ebenfalls linear von den Zahlen T abhängen muss.

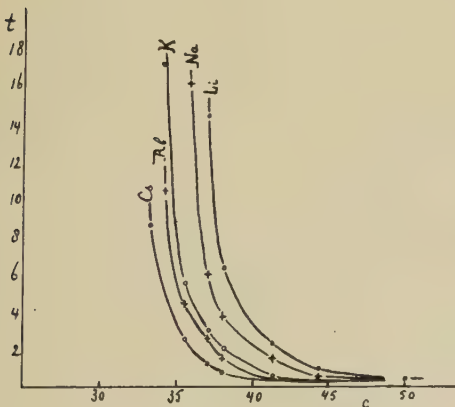


Fig. 5

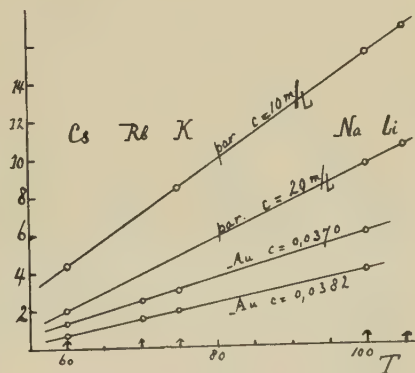


Fig. 6

¹⁾ Man berechnet leicht, dass die Werte aus der Tabelle TUORILA's (l.c.) für z.B. LiCl der Gleichung: $tc + 0.96c - 36t - 50.7 = 0$ (usw.) entsprechen. Der Beweis der Affinität verläuft völlig analog dem vorhergehenden Beispiel.

Prüfen wir dies für ein anderes Goldsol, dann zeigt sich die Richtigkeit dieses Satzes, wenn auch *Li* etwas abweicht¹⁾ (Fig. 6).

Ebenfalls tritt für ein Paraffinsol bei verschiedenen Konzentrationen der lineare Zusammenhang sofort zutage²⁾ (Fig. 6).

Man kann also wohl erwarten, dass diese Beziehungen im allgemeinen bei Koagulationsexperimenten gefunden werden dürften.

3. Elektrokinetisches Potential.

Auch die Abnahme des elektrokinetischen Potentials von Solen durch Hinzufügung von Elektrolyten erweist sich als linear abhängig von den lyotropen Zahlen der betreffenden Ionen.

Fig. 7 gibt dies für eine Tonsuspension²⁾, Fig. 8 für ein Paraffinsol²⁾ an (*Na* weicht etwas ab).

Analoge Beziehungen gelten für eine mit Erdalkalichloriden ausgeflockte Quarzsuspension (Fig. 9), wobei die lyotropen Zahlen aus Viskositätsmessungen³⁾ abgeleitet sind⁴⁾.

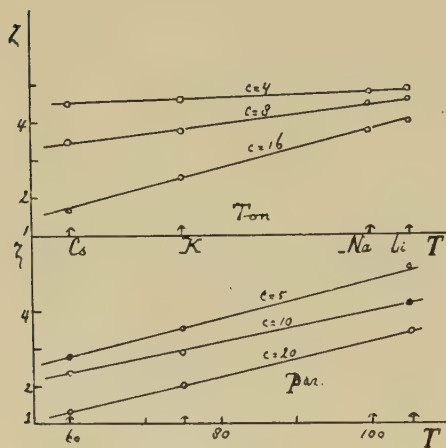


Fig. 7 und 8

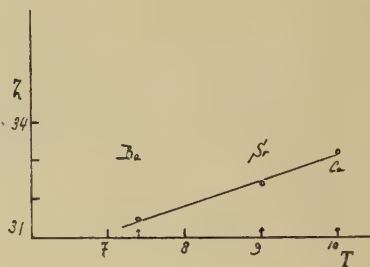


Fig. 9

4. Einfluss auf die Reaktionsgeschwindigkeit.

Die lyotrope Reihe tritt ebenfalls in die Erscheinung bei dem Einfluss, welchen neutrale Salze auf die Inversionsgeschwindigkeit von Rohrzucker ausüben⁵⁾. Auch hier finden wir wieder einen linearen Zusammenhang zwischen der prozentualen Zunahme der Inversionsgeschwindigkeit und derjenigen der lyotropen Zahlen *T* (Fig. 10).

¹⁾ TUORILA l.c. Tabelle 46.

²⁾ TUORILA, Koll. Beih. 27, 44, (1928).

³⁾ BÜCHNER, BRUINS und MERCKEL, Diese Proceedings, folgende Mitteilung.

⁴⁾ Weniger einfache Fälle, wie z.B. diejenigen, bei denen Ionenaustausch eintritt oder wobei die ζ, c -Kurven anfangs Steigung aufweisen, werden ausser Betracht gelassen.

⁵⁾ SPOHR, Z. Phys. Chemie, 2, 201, (1888).

Dieselben Beziehungen treten bei dem Einfluss der Erdalkalichloriden auf die Inversion der Saccharose auf (Fig. 11).

B. Anionen.

5. Einfluss auf die Verseifungsgeschwindigkeit von Estern.

Fig. 12 zeigt, dass die prozentuale Veränderung der Verseifungs-

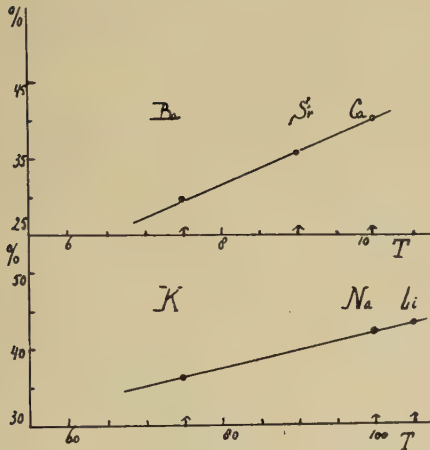


Fig. 10 und 11

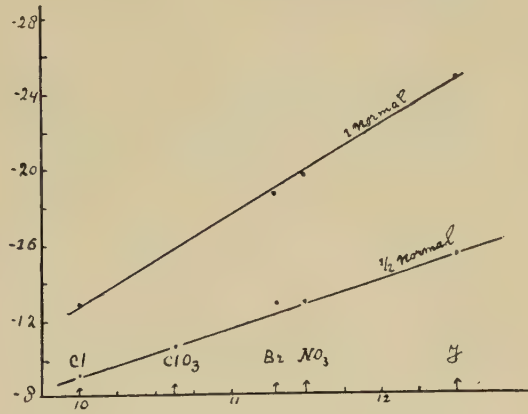


Fig. 12

geschwindigkeit von Äthylazetat linear von den lyotropen Zahlen abhängt¹⁾).

6. Quellung.

Von diesem ausgedehnten Gebiet haben wir nur eine einzige quantitative Untersuchung geprüft²⁾).

Wenn wir Gelatine in Elektrolytlösungen quellen lassen, zeigt sich, dass das Gewicht der gequollenen Gelatine als Vielfaches des Trockengewichts linear von den Zahlen N abhängt. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass, da die Zahlen durch Vergleichung äquimolarer Lösungen³⁾ abgeleitet sind, ein- und zweiwertige Ionen verschiedene Geraden bilden werden: letzteres infolge der Unvergleichbarkeit der Ionenwirkung in äquinormalen Lösungen, da hier sowohl Anion als Kation eine Rolle spielen.

Die Geraden für ein- und zweiwertige Ionen gehen durch einen Punkt auf der Geraden $S = 16$, den Wert für Wasser, wie theoretisch erwartet werden kann (Fig. 13).

1) SPOHR, l.c.; Arrhenius, Z. Phys. Chem. **1**, 110, (1887).

2) BÜCHNER, Rev. Trav. Chim. **46**, 439, (1927).

3) BRUINS, l.c.

Theoretische Betrachtungen.

7. Stellen wir uns die Frage, welche Bedeutung wir dem Vorangehenden beimessen können, dann fällt es auf, dass die lyotrope Wirkung eine Eigenschaft der Ionen selbst sein muss und zwar auf jedem Gebiet dieselbe Grundeigenschaft, da ja überall lineare Beziehungen gefunden werden. Nun ist man schon lange geneigt, die lyotrope Reihe als Resultat des wasseranziehenden Vermögens der Ionen aufzufassen.

Nach den Untersuchungen FAJANS und Anderer können wir als quantitatives Kriterium die Hydratationsenergie annehmen, während die Hydratation selbst auf elektrische Beeinflussung des Mediums zurückgeführt wird ¹⁾.

Es zeigt sich denn auch, dass die Hydratationsenergie (nach BORN—FAJANS, korrigiert nach neueren Messungen) ²⁾ sowohl bei den Alkali- (Fig. 14) und Erdalkali-Ionen als bei den Anionen (Fig. 15) in Zusammenhang mit den lyotropen Zahlen steht.

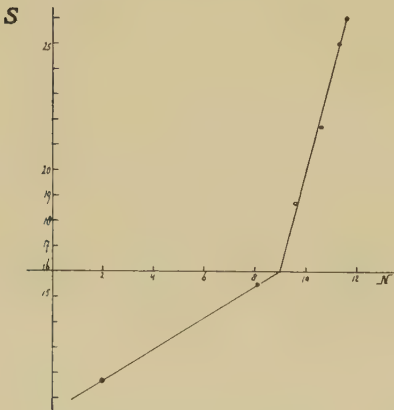


Fig. 13

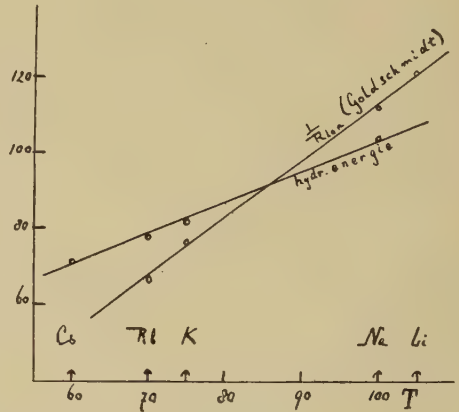


Fig. 14

Da auf theoretischem Wege nachgewiesen ist, dass für gleichgebaute Ionen die Hydratationsenergie annähernd dem reziproken Ionenradius ¹⁾ proportional zu setzen ist, lässt sich ebenfalls lineare Abhängigkeit zwischen den lyotropen Zahlen und dem reziproken Ionenradius (nach GOLDSCHMIDT) erwarten, was sich auch in der Tat als richtig erweist (Fig. 14 und 15).

Schliesslich suchten wir nach einem Zusammenhang zwischen den lyotropen Zahlen und Eigenschaften der Ionen, die unmittelbar mit der Energie des elektrischen Feldes der Ionen zusammenhängen. Wählen wir hierfür sowohl die Ionisationsspannungen der Alkalien als die Gitterenergien der Alkalihydriden, Chloriden, Bromiden, Jodiden, dann zeigt sich

¹⁾ BORN, Z. Phys. **1**, 45 (1920). WEBB, Am. Soc. **48**, 2587, (1926).

²⁾ VAN ARKEL und DE BOER, Chemische Binding, Amsterdam (1930).

direkt der lineare Zusammenhang mit den lyotropen Zahlen (Fig. 16, Ordinate in beliebigem Mass).

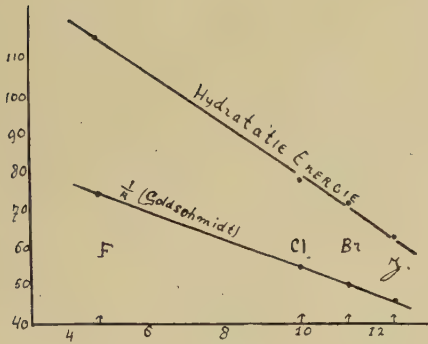


Fig. 15

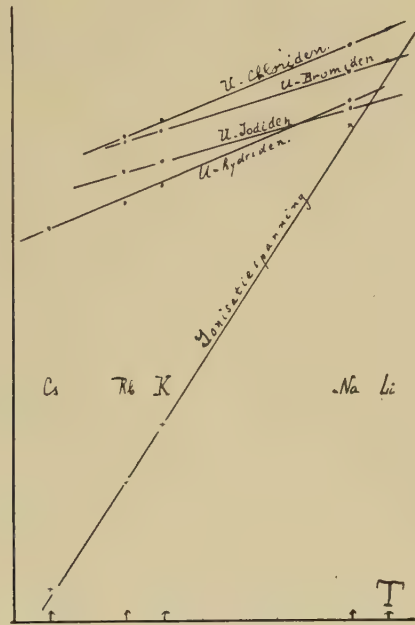


Fig. 16

8. Wir können also als Schlussfolgerung feststellen, dass es möglich ist, die rein lyotrope Wirkung der Ionen von sekundären Effekten zu trennen.

Besteht ein rein lyotroper Effekt, dann werden wir lineare Abhängigkeit der lyotropen Zahlen finden. Tritt ein sekundärer Effekt auf, dann werden Abweichungen der Geraden angetroffen.

Weiter wird die Auffassung, dass die lyotrope Wirkung der Ionen von der Energie der Ionenfelder abhängt, durch quantitative Erwägungen gestützt.

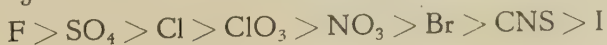
*Amsterdam, Anorganisch Chemisches Laboratorium
der Universität.*

Chemistry. — *Lyotrope Zahlen und Viskosität.* Von E. H. BÜCHNER, E. M. BRUNS und J. H. C. MERCKEL. (Communicated by Prof. A. F. HOLLEMAN.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

1. Die lyotropen Reihen der Ionen treten u.a. in der Viskosität von Salzlösungen zutage.

Aus den untenstehenden Tabellen liest man für Säuren, Na- und K-Salze von jedesmal gleicher Normalität die Reihenfolge ab:



und für die Erdalkalichloriden die Reihenfolge:



Die Reihe der Anionen stimmt, was die Reihenfolge der Ionen anbelangt, nicht ganz mit der Reihenfolge überein, wie diese beim Ausflocken gefunden wird.

Durch die Experimente BÜCHNER's und KLEYN's¹⁾ und diejenigen BÜCHNER's und POSTMA's²⁾ über das Aussalzen von Gelatine und Agar-solen ist bewiesen, dass in diesen Fällen die Anionen durch einander ersetzt werden können. Weiter hat sich gezeigt, dass sich der Einfluss der Kationen bei diesen Erscheinungen eliminieren lässt³⁾.

In der Viskosität einer Salzlösung werden sich jedoch sowohl die Kationen als die Anionen geltend machen. J. WAGNER⁴⁾ hat früher die Frage, ob sich diese Viskosität additiv aus Eigenschaften der Ionen berechnen lässt, für höhere Salzkonzentrationen verneinend beantwortet. Bei niedrigeren Salzkonzentrationen tritt jedoch Additivität der Ionen auf. Die Abweichungen bei höheren Konzentrationen sucht WAGNER aus einem verschiedenen Dissoziationsgrad der Salze zu erklären.

2. Verfolgt man die relative Viskosität in bezug auf Wasser bei verschiedenen Säuren, dann findet man hierfür die folgenden Werte bei $t = 25^\circ$.

Die Viskosität der einbasischen Säuren erweist sich als linear abhängig von den lyotropen Zahlen der Anionen, wie diese von BRUINS (l.c.) angegeben sind. Fig. 1 gibt dies graphisch wieder.

TABELLE I⁵⁾.

$t = 25^\circ$	$\frac{1}{4} n$	$\frac{1}{2} n$	$1 n$
H_2SO_4	1.022	1.043	1.090
HCl	1.017	1.034	1.067
HClO_3	1.014	1.025	1.052
HBr	1.009	1.016	1.032
HNO_3	1.005	1.011	1.027

¹⁾ Diese Proceedings **30**, 740, 1927.

²⁾ Diese Proceedings **34**, 699, 1931.

³⁾ BRUINS, diese Proceedings **35**, 107, 1932.

⁴⁾ Ztschr. Phys. Chemie **5**, 31, 1890.

⁵⁾ LANDOLT BÖRNSTEIN, Tabellen. S. 86—89, 1923.

Es zeigt sich weiter, dass die zu verschiedenen Konzentrationen gehörenden Linien durch einen Punkt auf der Linie $\eta = 1.000$ gehen, was theoretisch zu erwarten ist, da in einem derartigen Diagramm dieser Punkt den N des Anions einer Säure (eventuell eines Salzes), das die Viskosität von

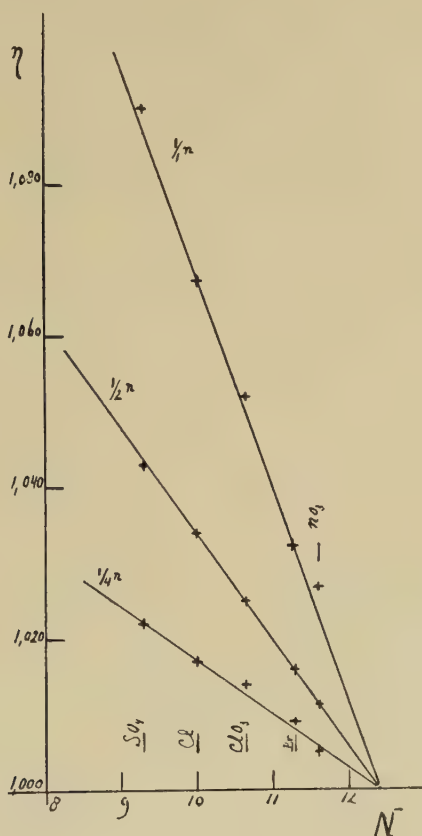


Fig. 1

Wasser nicht beeinflusst, angibt. Da dieser Schnittpunkt bei N etwas kleiner als 12.5 liegt, ist also zu erwarten, dass HJ eine Viskosität von ca. 1.000 ergeben wird, und zwar etwas kleiner. Dies ist in der Tat der Fall. Man findet für $0.1 n HJ$ 0.996 angegeben und für $0.2 n HJ$ 0.995¹⁾.

Die H_2SO_4 würde für $N=2$ völlig ausserhalb dieser Geraden fallen. Bedenkt man aber, dass die Zahlen der Anionen durch Vergleichung äquimolarer Lösungen nach Eliminierung des Kations erhalten sind, dann leuchtet es ein, dass die Konzentration der SO_4'' Ionen um die Hälfte zu klein ist.

Nimmt man für die Säuren eine Additivität der Ionen an und bemerkt man, dass der $\Delta\eta$ der Konzentration direkt proportional ist, dann folgt hieraus, dass man durch eine Verschiebung des SO_4'' Ions nach einem

¹⁾ International Critical Tables, Vol. V, 12, 1929.

anderen N die verschiedenen Punkte für die H_2SO_4 auch auf die Geraden bekommen können wird. Dies ist in der Tat der Fall bei $N=9.3$.

Der Konzentrationsunterschied bewirkt also, dass das SO_4'' *scheinbar* nach einem anderen N verschiebt, und für die Säuren kann man folgern:

1. Die Viskosität der Säuren ($\leq 1n$) ist additiv aus einem Modul für die H -Ionen und einem Modul für die Anionen zu berechnen.

2. Die Moduli der Anionen hängen linear von den lyotropen Zahlen ab.

3. Wenden wir uns nunmehr zu der Viskosität von Lösungen von Na - und K -Salzen. Diesbezügliche experimentelle Data findet man in den Tabellen II und III.

TABELLE II ¹⁾.

$t = 25^\circ$	$\frac{1}{4} n$	$\frac{1}{2} n$	$1 n$
Na Br	1.015	1.030	1.064
Na Cl O ₃	1.022	1.042	1.090
Na Cl	1.024	1.047	1.097
Na ₂ S O ₄	1.052	1.106	1.229
Na J	1.008	1.025	1.032
Na CNS	1.015	1.028	1.060

TABELLE III ²⁾.

$t = 25^\circ$	$\frac{1}{4} n$	$\frac{1}{2} n$	$\frac{3}{4} n$	$1 n$
K Cl	1.000	0.998	0.997	0.997
K Br	0.991	0.982	0.974	0.969
K ₂ S O ₄	—	1.056	1.084	—
K N O ₃	0.991	0.983	0.977	—
K J	0.982	0.965	0.949	0.936
K CNS	0.991	0.982	—	0.972
K F	1.037	1.072	—	—

Wie man leicht berechnen kann und wie aus Fig. 2 und 3 erhellt, ergibt ein η, N -Diagramm wieder für Chloride, Bromide und Jodide drei durch *einen* Punkt auf der Linie $\eta=1.000$ gehende Grade.

Wenn man bei den Natriumsalzen das SO_4'' nach $N=5.4$ und das CNS' nach 11.5 schiebt, bekommt man wieder einen Satz Punkte auf einer Geraden für jede Konzentration.

Bei den Kaliumsalzen muss man CNS' von reichlich 13 nach 11.4 verschieben. Das Sulfat kommt auf $N=6.0$, das Fluorid auf $N=4.8$.

4. Ferner kann man bemerken, dass die Viskosität von Gelatine- und

¹⁾ LANDOLT BÖRNSTEIN, Tabellen, S. 86—89. 1923 und eigene Bestimmungen MERCKELS.

²⁾ EDELMAN, Dissertation, Utrecht, 1931, S. 31 und 39.

Amylumsolen bei mittleren Elektrolytkonzentrationen ebenfalls linear von

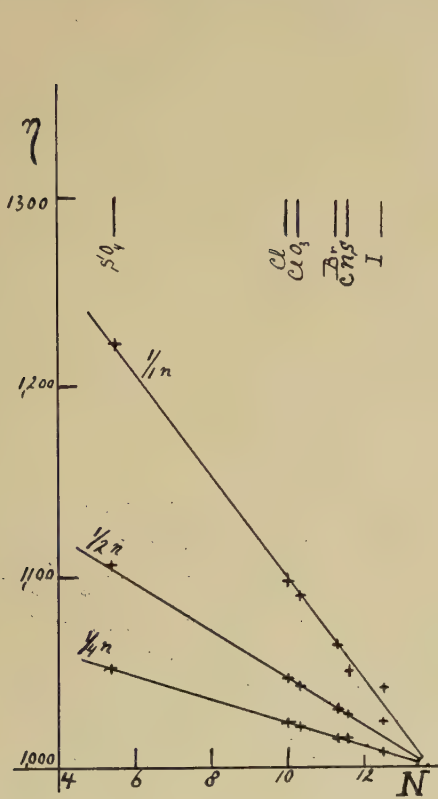


Fig. 2

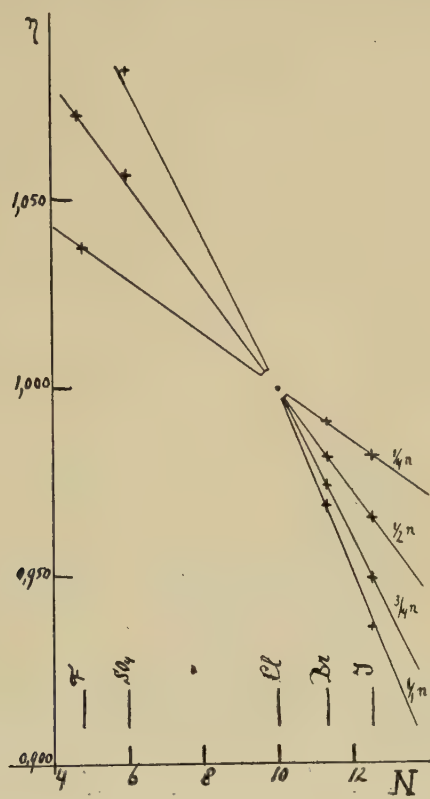


Fig. 3

den lyotropen Zahlen abhängt (siehe Figuren 4 und 5 und Tabellen IV und V).

TABELLE IV ¹⁾.

t = 25°	$\frac{32}{1000} n$	$\frac{64}{1000} n$
K Cl	1.083	1.107
K Br	1.068	1.097
K NO ₃	1.065	1.092
K J	1.054	1.083

TABELLE V ²⁾.

t = 25°	$\frac{1}{4} n$	$\frac{1}{2} n$	$\frac{3}{4} n$
K Cl	51.0	52.3	53.9
K Br	53.2	55.5	57.7
K NO ₃	54.1	56.8	59.3
K J	56.0	58.6	60.8

¹⁾ GALEMA, Dissertation, Utrecht 1931, S. 16—18.

²⁾ EDELMAN, l.c. S. 34.

Der elektroviscöse Effekt ist bei diesen Konzentrationen bereits weggenommen, während andere Effekte, die sich in dem Durcheinanderlaufen der η - c -Linien äussern, noch nicht in den Vordergrund treten.

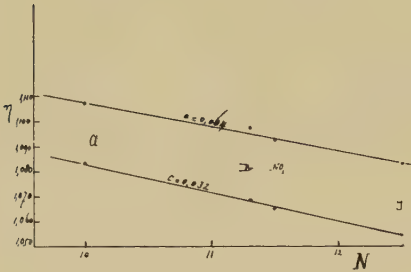


Fig. 4

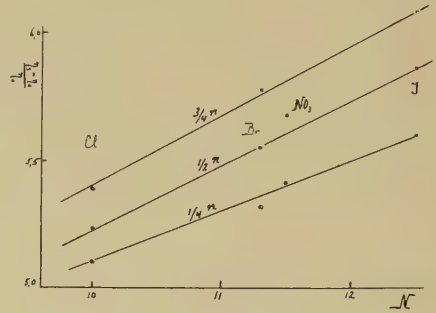


Fig. 5

5. Oben ist nachgewiesen, dass die Veränderung der Viskosität bei Lösungen von Säuren und Salzen von Konzentrationen $\leq 1n$ direkt proportional den lyotropen Zahlen der Anionen ist. Die Verschiebung des $\text{SO}_4^{''}$ Ions nach einem anderen N kann besonders durch den Konzentrationseinfluss erklärt werden, der schon angegeben ist. Es zeigt sich jedoch, dass die Verschiebung für Schwefelsäure, Natrium- und Kaliumsulfat eine andere ist. Auch das Rhodan-Ion verschiebt sich¹⁾. Man kann dies durch eine Beeinflussung der Ionen untereinander erklären. Das Kation bringt die Wirkung des Anions, die übrigens durch die lyotrope Zahl bedingt wird, zu einer bestimmten Fraktion p zurück. In vorstehenden Fällen kann man bei konstantem Kation stets schreiben: $\Delta\eta = K (pN - a)$, wobei K eine der Konzentration proportionale Konstante und p ein Faktor, der in vorstehenden Fällen ausschliesslich für SO_4 und CNS von der Einheit verschieden ist, darstellen.

6. Auch für die Viskosität der Kationen werden diese Betrachtungen weiter ausgearbeitet werden. Bereits wurde für die Erdalkalien die Reihe²⁾ gefunden:

$$\text{Be} = 22.4 \quad \text{Mg} = 14 \quad \text{Ca} = 10.0 \quad \text{Sr} = 9.0 \quad \text{Ba} = 7.4$$

Diese Zahlen sind aus den folgenden Viskositätsmessungen der Lösungen von Chloriden berechnet (Tabelle VI).

¹⁾ Bemerkenswert ist der Umstand, dass die Verschiebung von CNS , bewirkt durch die einander verwandten Ionen Na und K , dieselbe ist.

²⁾ Vergleiche hierfür BÜCHNER, VOET und BRUINS, diese Proceedings, vorangehende Mitteilung.

TABELLE VI ¹⁾.

t = 25°	$\frac{1}{4}$ n	$\frac{1}{2}$ n	$\frac{3}{4}$ n
Ba Cl ₂	1.032	1.064	1.095
Sr Cl ₂	1.037	1.073	1.110
Ca Cl ₂	1.040	1.081	1.121
Mg Cl ₂	1.053	1.105	1.158
Be Cl ₂	1.080	1.158	—

Amsterdam, Anorganisch Chemisches Laboratorium
der Universität.

¹⁾ EDELMAN, l.c. S. 42, 43.

Geology. — *Tektonik des Zinnerzgrubengebietes von Klappa-Kampit, Billiton, Niederländisch Ost-Indien* ¹⁾. Von P. M. ROGGEVEEN. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

Das Grubengebiet von Klappa-Kampit liegt im Nordosten der Insel Billiton in 2°42' s.Br. und 108°5' ö.L. ²⁾. Die Zinnerzgruben befinden sich bei dem Klappa-Kampit-Berg, der ungefähr 216 m hoch ist ²⁾. In diesem Berg gibt es mehrere Erzgruben; am Nordfuss liegen einige Gruben, welche eine Tiefe von 125 m erreichen ³⁾.

Das ganze Gebiet besteht aus Sandsteinen (Quarziten) und Tonschiefern ohne Fossilien. Kalkige Sedimente fehlen. Das Schichtstreichen ist nicht ganz konstant: es wechselt von N85°0 bis N125°0. Im allgemeinen ist es etwa 110°, was ungefähr übereinstimmt mit dem vorherrschenden Sedimentstreichen im weiter östlichen Billiton. Im Nordwesten des hier behandelten Gebietes ist das Streichen ca. 90°. Dieses kommt westlicher allgemein vor. Das Fallen der Schichten ist immer steil, das heisst fast immer grösser als 65°, bis 90°. Südliches Einfallen ist Regel; nur am Nordfuss

¹⁾ Veröffentlicht mit Genehmigung der Direktion der „Gemeenschappelijke Mijnbouwmaatschappij Billiton“.

²⁾ Zeekaart Oostkust Billiton, 1 : 200.000 (1902).

³⁾ Höhenangaben werden gemacht in Bezug auf die O-Isohypse der Karte, weil die genaue Höhe über Meeresniveau noch nicht bekannt ist.

des Berges trifft man zuweilen nördliches Einfallen an. Synklinalen oder Antiklinalen können nicht unterschieden werden: die Sedimente sind wahrscheinlich isoklinal gefaltet worden, was dem Anschein nach in Billiton Regel ist.

In den Sedimenten von Klappa-Kampit gibt es Erzgänge. Sie enthalten ausser Zinnerz u.A. Pyrit, Pyrrhotin, Arsenkies, Kupferkies und Magnetit. Weiter treten auf: Quarz, Fluorit, Glimmer, Chlorit, Hornblende, Pyroxen, Granat, Turmalin, Topas, Calcit, Siderit, Vivianit, usw. Die Erzgänge treten auf in der Schichtrichtung (Lagergänge) und auch als Füllung von Verwerfungsspalten (Verwerfungsgänge). Die Lagergänge sind oft an bestimmten petrographischen Niveaus gebunden, z.B. Grenzen von Ton-schiefern und Sandsteinpaketen. Sie treten meistens auf in den tonigen Gesteinen.

Granite oder andere Eruptivgesteine sind aus diesem Gebiete nicht bekannt. Der nächstliegende Granit befindet sich in einer Entfernung von ungefähr 7 km. In den Tiefgruben am Nordfuss des Berges gibt es jedoch hier und da schwache Kontakterscheinungen in den tonigen Sedimenten, welche auf eine Anwesenheit von Granit in der Tiefe hinweisen können. Gleichartige Sedimentumwandlungen sind jedoch bisweilen auch von den Erzgängen veranlasst worden, wie ich das öfters vorgefunden habe.

Das Klappa-Kampit-Gebiet ist stark gestört von zahlreichen Verwerfungen in verschiedenen Richtungen und fast immer mit steilem bis senkrechtem Fallen.

In der Karte ist der tektonische Bau eines Teiles Klappa-Kampits mit den wichtigsten Verwerfungen und Lagergängen angegeben worden. Aus der Richtung der Lagergänge ist zu gleicher Zeit das Schichtstreichen ersichtlich.

Die Angaben der Karte sind fast ohne Ausnahme in den Bergwerken gesammelt worden, wo eine genaue Kartierung möglich ist. Das Tiefgruben-gebiet wurde von mir in 1931 kartiert. Was den Berg betrifft habe ich mich u.A. der Kartierungen von Dr. J. W. H. ADAM bedient, während für dieses Gebiet auch Explorations-Ergebnisse verwertet wurden.

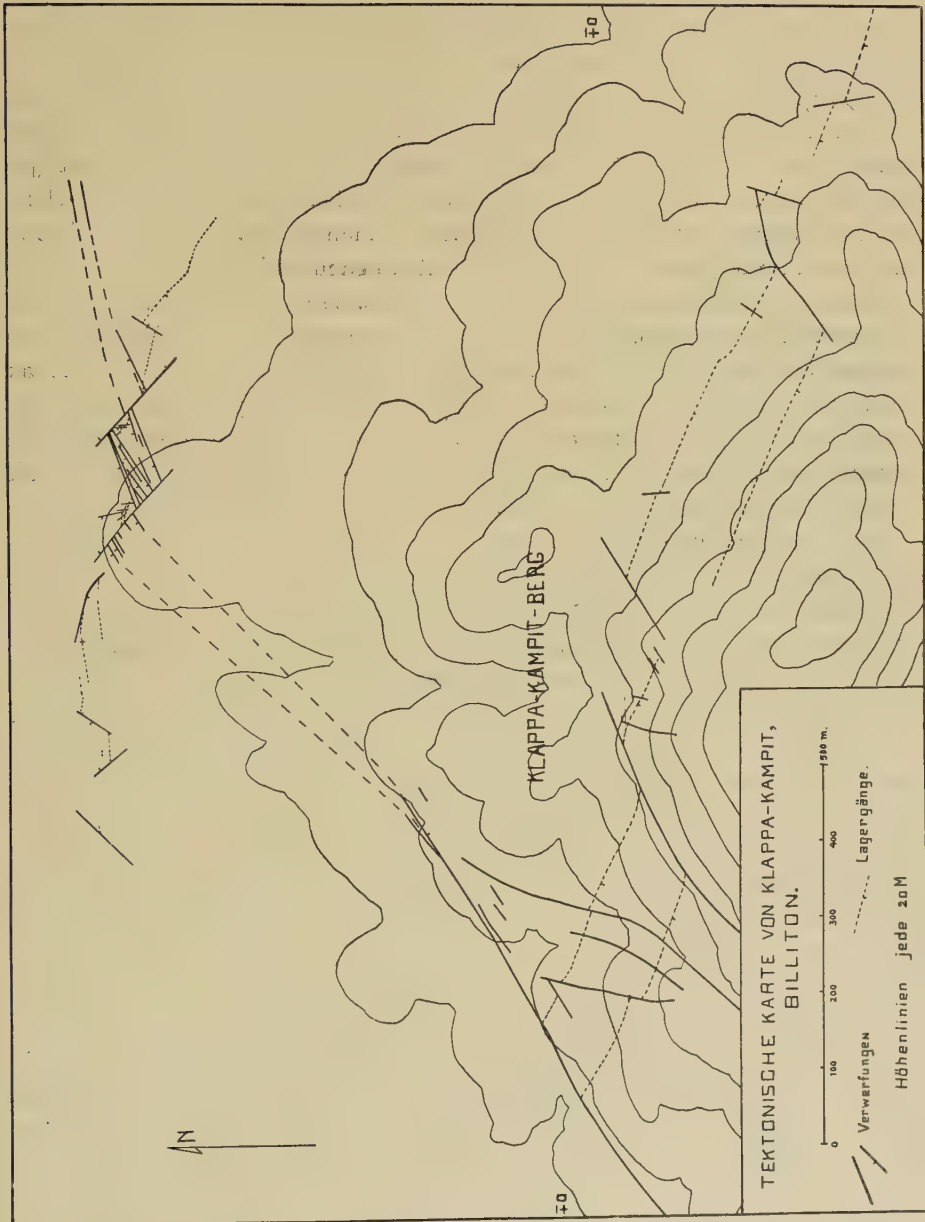
Die tektonische Komplikationen des Tiefgrubengebietes sind derart, dass Weglassung einer Anzahl Einzelheiten notwendig war. Die Karte gibt den geologischen Aufbau der vierten Sohle, welche in einer Tiefe von mehr als 90 m gelegen ist ¹⁾. Für einige Details sind Aufnahmen der dritten und fünften Sohle verwendet worden.

Der geologische Bau des Berges ist angegeben in einem Horizontalschnitt auf ungefähr 30 m Höhe. Für das südöstlichste Teil des Kartengebietes sind einige Daten eines —6 m Niveaus abgebildet worden.

Die Verwerfungen sind bisweilen mineralisiert, besonders im Klappa-Kampit-Berg, ausnahmsweise auch in den Tiefgruben. Die Lagergänge sind von den Verwerfungen verschoben worden. In der Nähe von Lagergängen

¹⁾ Vide Fussnote 3 (S. 575).

kann man in den Verwerfungen Erztrümmer antreffen, welche durch Schleppung in den Verwerfungsspalten gelangt sind. Die Mineralisation hat also angefangen vor der Entstehung der Verwerfungen. Ein Teil der Verwerfungen ist entstanden während der Mineralisationsperiode, eine An-



zahl jedoch erst später. Es ist möglich, dass die Mineralisation im Gebiete der Tiefgruben eher statt gefunden hat oder früher beendet war als in dem Berg.

An verschiedenen Stellen konnte ein Altersunterschied zwischen ver-

schieden gerichteten Verwerfungen festgestellt werden. So gibt es im Tiefgrubengebiet einige grosse Verwerfungen mit ungefähr 130° -Streichen, welche jünger sind als ein dort auftretender Verwerfungsbüschel mit 65° -Streichen. Es konnte bewiesen werden, dass sie die 65° -Verwerfungen verschoben haben. Der 65° -Büschel vereinigt sich in nordöstlicher Richtung zu einigen grossen Verwerfungen. Im Südwesten konvergiert er in eine grosse Verwerfung entlang der Nordwestflanke des Klappa-Kampit-Berges ¹⁾).

Sehr viele Daten bezüglich Rutschstreifen ergaben, dass die Verschiebungen im Klappa-Kampit-Gebiet in fast horizontaler Richtung statt gefunden haben. Nur selten bemerkte ich Rutschstreifenrichtungen, welche mit dem Streichen der Verwerfungsflächen einen Winkel von mehr als 30° umfassen. Im allgemeinen ist dieser Winkel bedeutend kleiner.

In den meisten Fällen konnte bei den Verwerfungen festgestellt werden in welche Richtung ein ursprünglich zusammenhängendes Schichtenpaket an den Verwerfungsflächen entlang auseinander geschoben worden ist. Das ist möglich durch das öfters Vorhandensein von Schleppungen, bisweilen auch dadurch, dass beiderseits der Verwerfungsfläche übereinstimmende charakteristische Schichten bekannt sind. Letzteres ist besonders der Fall für die Gebiete, wo Lagergänge auftreten.

In den Lagergangsgebieten konnte also bei einer Anzahl Verwerfungen der Verschiebungsbetrag gefunden werden. Bei Verwerfungen, deren Streichen ungefähr senkrecht zum Sedimentstreichen steht, ergibt sich dass ihr Betrag gering ist im Vergleich mit dem Betrag von Verwerfungen mit anderen Richtungen. Der Betrag der ersteren ist selten mehr als einige Meter ²⁾, während die Beträge anderer Verwerfungen viel grösser sind.

Ich beobachtete, dass für alle Verwerfungen des Klappa-Kampit-Gebietes, deren Streichen weder parallel, noch senkrecht zum Schichtstreichen orientiert ist, folgende Verschiebungsregel angegeben werden kann:

Bei den steilen Verwerfungen weist die Spitze der scharfen Ecke zwischen Schichtrichtung und Verwerfungsfläche in der Richtung, in welcher die Fortsetzung einer Schicht verschoben worden ist (Fig. 1, Horizontalprojektion).

Die Schleppung verschärft diese Ecke. In obenstehender Regel wird jedoch die normale Schichtrichtung gemeint.

Im Tiefgrubengebiet fand ich an 40 Stellen Verwerfungen, für die diese Regel zutrifft. In der Karte kann man zahlreiche Beispiele antreffen. Die Regel wird deutlich demonstriert von den Gangverwerfungen, z.B. in der Gangzone der Tiefgruben, und auch bei den zwei Lagergängen im Berge, welche alle von Verwerfungen stark zerbrochen worden sind.

¹⁾ In der Karte ist dieser Zusammenhang schematisch angedeutet worden, weil, wie schon bemerkt wurde, die Geologie des Tiefgrubengebietes auf einem anderen Niveau eingetragen worden ist, als diejenige des Berglandes.

Im allgemeinen sind es kleine Verwerfungen, welche nur zum Teil in der Karte abgebildet sind.

Diese Gesetzmässigkeit der Verschiebungen lässt sich in folgender Weise erklären:

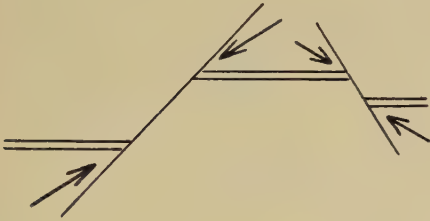


Fig. 1.

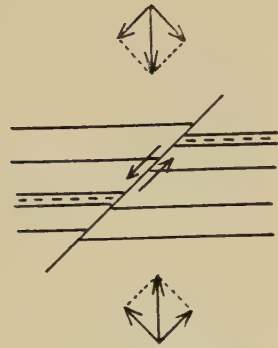


Fig. 2.

Wie schon bemerkt wurde, sind die Sedimente Klappa-Kampits steil aufgerichtet und offenbar isoklinal gefaltet worden. Die steile Lagerung ist entstanden durch zusammenpressende Bewegungen, senkrecht zur gegenwärtigen Streichrichtung. Die Aufrichtung hat ein vertikales Ausweichen in Bezug auf die Zusammenpressung verursacht. In der Richtung der Zusammenpressung wurde in dieser Weise die Mächtigkeit des Gesteinspakets verringert.

Als die Zusammenpressung noch mehr zunahm, entstanden in den Teilen mit stärkster Zusammenpressung steile Ausweichflächen, welche eine weitere Mächtigkeitsreduktion ermöglichten: Material wurde diesen Verwerfungen entlang aus den am stärksten zusammengepressten Gebieten seitwärts fortgeschoben. Die Verschiebungsbewegungen sind direkte Komponenten der Zusammenpressung (Fig. 2).

In dieser Weise ist m.E. der Verschiebungsmechanismus der Klappa-Kampit-Verwerfungen zu betrachten.

Die Verwerfungen, deren Streichen ungefähr senkrecht zum Schichtstreichen steht, können keine Kürzung in der Zusammenpressungsrichtung veranlassen. Es sind keine Ausweichverschiebungen. Ihr Betrag ist gering. Deutliche Beispiele solcher Verwerfungen kommen vor im westlichen Teil des Berges.

Zum Schluss dürfte noch bemerkt werden, dass im Klappa-Kampit-Gebiet an einem Ort kleine, wenig geneigte Verwerfungen auftreten, deren Streichen ungefähr zusammenfällt mit der Schichtrichtung. Diese Verwerfungen sind Aufschiebungen, deren Hangende sich bezüglich des Liegenden relativ gehoben hat. Auch sie haben also eine Kürzung in der Zusammenpressungsrichtung verursacht.

Die tektonische Phänomene im Klappa-Kampit-Gebiete können also alle mit der Zusammenpressung des Sedimentpakets in Zusammenhang gebracht werden.

Bussum, 5 März 1932.

Geology. — *Mesozoisches Koniferenholz (Protocupressinoxylon malayense n.s.) von der Insel Soegi im Riouw-Archipel, Niederländisch Ost-Indien.* Von P. M. ROGGEVEEN. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

In August 1930 fand ich verkieseltes Koniferenholz bei Tandjong Riau an der Südküste der Insel Soegi im Riouw-Archipel (Fig. 1). Die grauschwarzen, bis kopfgrossen Stücke wurden angetroffen am Fuss der steilen Felsenküste von Tandjong Riau, welche an dieser Stelle aus konglomeratischen Sandsteinen besteht. Zweifelsohne stammen die Stücke aus diesem Gestein her, denn auf Soegi und benachbarten Inseln tritt nur eine einzige Sedimentformation auf¹⁾, welche aus Sandsteinen mit Übergängen nach Konglomeraten, und Tonschiefern besteht. Dieser Formation wird altmesozoisches (wahrscheinlich triadisches) Alter zugemessen²⁾, weil in gleichartigen Sedimenten an mehreren Stellen triadische Fossilien gefunden worden sind (Malakka, Singapore-Insel³⁾, Lingga⁴⁾).

Ungefähr 20 Stücke sind gesammelt worden. Insofern untersucht, gehören sie alle zu derselben Art. Nicht alle Stücke sind gleich gut erhalten. Die folgende Beschreibung ist gegründet auf Schliffenuntersuchung von zwei der besten Stücke⁵⁾.

Beschreibung des anatomischen Baues :

Die Tracheiden sind polygonale, abgerundete Prismen mit zugespitzten Enden. Nur an den Markstrahlen zeigen sie im Radialschnitt gelegentlich stumpfe Ende. Die Lumina sind im allgemeinen fast isometrisch, weil Jahresringe fehlen. Die Abmessungen wechseln von ca. 35—55 μ . Die Dicke der Tracheidenwände beträgt ungefähr 10 μ . Die Tracheidenwände

1) Von rezenten Ablagerungen abgesehen und mit Ausnahme eines kleinen Gebietes an der Nordostküste, wo möglich ältere Gesteine auftreten.

2) A. CHR. D. BOTHÉ : Geologische verkenningen in den Riouw-Lingga Archipel en de eilandengroep der Poeloe Toedjoeh (Anambas- en Natoena-eilanden). Jaarb. v. h. Mijnnw. in Ned. Indië, LXIV, 1926. Verh. II. S. 144 und die Karte.

A. CHR. D. BOTHÉ : Brief outline of the geology of the Rhio Archipelago and the Anambas Islands. Jaarb. v. h. Mijnnw. in Ned. Indië, LXIV, 1926. Verh. II. S. 97.

3) J. B. SCRIVENOR : The geology of Malaya. London, 1931. S. 64, 65, 66 u. 107.

BOTHÉ : Geol. Verk. usw. S. 119, 143, 144.

4) BOTHÉ : Geol. Verk. usw. S. 143.

5) Das Material wurde mit Genehmigung des Superintendenten der „Nederlandsch Indische Tin-Exploitatatie-Maatschappij“ dem geologischen Institut der Universität in Utrecht geschenkt.

sind spiralgestreift. Die Richtung der Spiralstreifung ist $30-40^\circ$ gegen die vertikale Tracheidenwand geneigt. Hoftüpfel sind nur auf den radialen Wänden der Tracheiden vorhanden. Tangentialtüpfel fehlen. Die Breite der Hoftüpfel ist ca. $20\ \mu$, mit rundem Porus (Diameter ungefähr $8\ \mu$). Die Hoftüpfel befinden sich fast immer nur in einer Reihe auf den Tracheidenwänden, sehr selten sind sie zweireihig, sie sind dann immer opponiert gestellt. Die Hoftüpfel einer Reihe können sich berühren und sich in geringem Masse abplatten. Im Tangentialschnitt sind derartige Tüpfel nur durch ganz dünne Wände voneinander getrennt. Der vertikale Hoftüpfelabstand ist im allgemeinen weniger als $5\ \mu$, selten mehr als die halbe Breite eines Tüpfels. Saniostreifen zwischen den Tüpfeln sind nicht wahrgenommen worden.

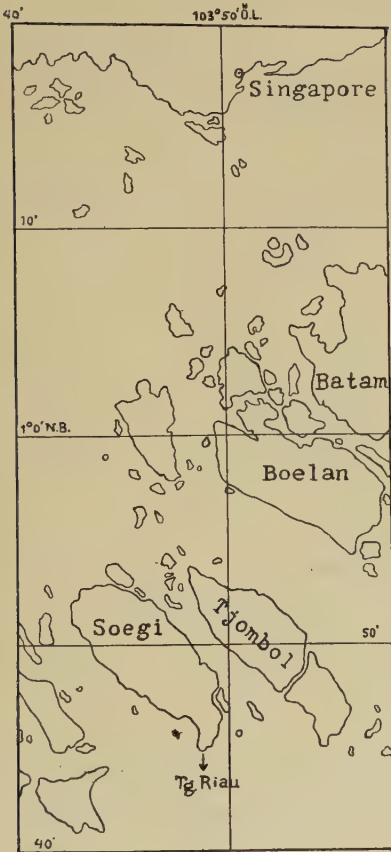


Fig. 1

Holzparenchym konnte nicht identifiziert werden. Hier und da gibt es zwar Zellen mit dunkelbraunem Inhalt, horizontale Querwände fehlen aber anscheinend¹⁾. Diese Zellen sind wahrscheinlich von gleichem Bau wie die normalen Tracheiden.

Harzgänge fehlen.

Die Markstrahlen sind immer einreihig. Sie sind 2-16-stöckig, im Mittel ca. 7-stöckig. Die Markstrahlenfrequenz kann folgenderweise angegeben werden: im Tangentialschnitt kommen einer Horizontallinie entlang z.B. folgende Elemente vor: Markstrahl, 4 Tracheiden, M, 6 T, M, 4 T, M, 3 T, M, 2 T, M, 5 T, M, 5 T, M, 9 T, M, usw. Im Radialschnitt findet man einer Vertikallinie entlang z.B.: 9-stöckiger Markstrahl, $270\ \mu$, 5 sM, $680\ \mu$, 9 sM, $90\ \mu$, 7 sM, $270\ \mu$, 5 sM, $170\ \mu$, 5 sM, usw.

Die Markstrahlzellohhe ist ca. $25\ \mu$, die Länge z.B. $80\ \mu$ (letztere öfters undeutlich). Die mittleren Markstrahlzellen sind im Querschnitt ungefähr rund. Die Dicke der im allgemeinen schlecht erhaltenen, glatten Wände ist weniger als $5\ \mu$. Interzellulare sind undeutlich. Die Horizontal- und Querwände der Markstrahlen sind ungetüpfelt. Die Kreuzungsfeldtüpfel sind meistens schlecht erhalten, an einer Stelle des Radialschnittes sind sie aber recht deutlich. Es gibt 1-5 Tüpfel im Kreuzungsfeld, im allgemeinen

¹⁾ Quarzkristallgrenzen können hier Querwänden täuschend ähneln, werden aber in polarisiertem Licht leicht erkannt.

sind aber 1—3 vorhanden. Die Tüpfel sind behöft und haben elliptische, geneigte Pori. Diese Tüpfel sind einförmig ¹⁾. Sie stehen meistens gedrängt beieinander. Die Tüpfelbreite ist ca. 10 μ , die Spaltbreite ca. 4 μ .

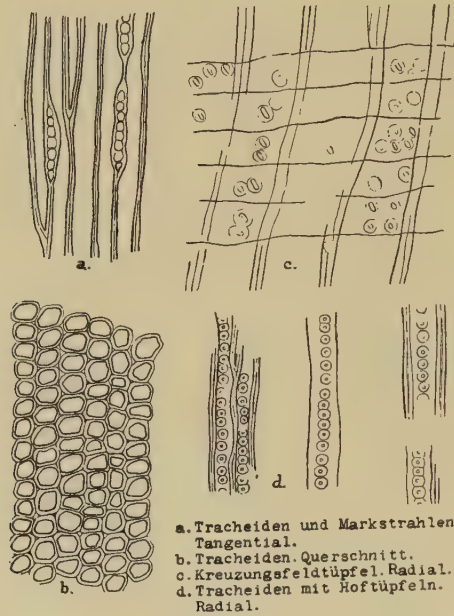


Fig. 2

Zusammenfassung :

Harzgangloses Koniferenholz ohne Jahresringe, mit harzführenden Tracheiden, ohne Holzparenchym (?). Tracheidentüpfel nur auf den radialen Wänden, fast immer einreihig, meistens mit geringen Intervallen oder sich berührend und bisweilen oben und unten in geringer Weise abgeplattet. Mehrreihige Tüpfel immer opponiert. Markstrahlen einreihig, aus einerlei Zellen. Wände glatt. Kreuzungsfeldtüpfel klein, 1—5, im allgemeinen 1—3 im Kreuzungsfeld, behöft, mit geneigtem, ziemlich schmalem Porus.

Bestimmung ²⁾ :

Der Bau der Markstrahlen schliesst die Gruppen Cedroxyla und Pityoxyla aus. Das Holz gehört ebenfalls nicht zu den Taxoxyla, weil Spiralverdickung der Tracheidenwände fehlt. Zu Juniperoxylon ist das Holz

¹⁾ Wenn der Markstrahl im Dünnschliff gelegen ist, kann die Spaltöffnung, welche bekanntlich immer an das Tracheidenlumen grenzt, fortgeschliffen sein. Man sieht in diesem Fall ungefähr runde Pori und schmale Höfe.

²⁾ Literatur :

W. GOTHAN : Zur Anatomie lebender und fossiler Gymnospermen-Hölzer. Abh. d. Preuss. Geol. Landesanstalt. Neue Folge, Heft 44. Berlin, 1905.

A. C. SEWARD : Fossil plants. Vol. IV. Cambridge, 1919.

W. PRILL u. R. KRÄUSEL : Braunkohlenhölzer. Jahrb. d. Preuss. Geol. Landesanstalt. Bd. XXXVIII, 1917. T. II. S. 191.

nicht zu stellen, weil die Tangentialwände der Markstrahlzellen ungetüpfelt sind. Der Markstrahlenbau ist dem der übrigen Cupressinoxyla und Mesembryoxyla ähnlich. Es ist aber schwierig das Holz mit diesen Gruppen zu vergleichen, weil Jahresringe fehlen und somit der typische Formwechsel der Kreuzungsfeldtüpfel nicht vorkommt¹⁾.

Das Fehlen von Holzparenchym und das Vorkommen dichtgedrängter, zum Teil abgeplatteter Hoftüpfel sind Merkmale des Araucarioxylon-Typus. Eine derartige Tüpfelung kann aber auch bei anderen Koniferen auftreten, z.B. bei *Saxegothea conspicua* Lindl. und einige anderen spirallosen Taxaceae²⁾. Bei den rezenten Cupressineae ist nicht immer Holzparenchym vorhanden (GOTHAN, SEWARD), während das Fehlen von Holzparenchym auch bei *Phyllocladoxylon* angegeben wird (SEWARD). Der Bau der Kreuzungsfeldtüpfel schliesst *Xenoxylon* aus, weil dieses grosse Eiporen hat.

KRÄUSEL unterscheidet als *Protopinaceae* eine Gruppe fossiler Koniferen, deren anatomischer Bau (besonders die Tracheidentüpfelung) einen Übergang vom araucaroiden Typus zu den übrigen, modernen Gruppen darstellt. Eine derartige Tüpfelung hat auch das Soegi-Holz. Die *Protopinaceae* sind fast nur aus Kreide und Jura bekannt³⁾. Es ist nicht ausgeschlossen, dass die Soegi-Sedimente jünger als Trias (jüngeres Mesozoikum) sind, es ist jedoch auch möglich, dass hier eine triadische *Protopinaceae* vorliegt. Das Koniferenholz von Soegi wird am Besten zu der Gattung *Protocupressinoxylon* ECKHOLD gestellt, obwohl Jahresringe fehlen. Es ist keiner bekannten Art ähnlich. Ich benenne es: *Protocupressinoxylon malayense nov. sp.*

Aus Niederländisch Ost-Indien sind nur einige fossilen Koniferenholzer bekannt. Tertiäre Formen sind überhaupt nicht vorhanden⁴⁾.

R. KRÄUSEL: Die fossilen Koniferenholzer (unter Ausschluss von *Araucarioxylon* Kraus). Versuch einer monographischen Darstellung. *Palaeontographica* LXII, 1919, S. 185.

R. KRÄUSEL: Nachträge zur Zusammenstellung fossiler Koniferenholzer (unter Ausschluss von *Araucarioxylon* Kraus). *Senckenbergiana*, Bd. II, 1920, S. 198.

R. KRÄUSEL: Zur Bestimmung fossiler Koniferenholzer. (System). *Senckenbergiana*, Bd. II, 1920. S. 204.

W. ECKHOLD: Die Hoftüpfel bei rezenten und fossilen Koniferen. *Jahrb. d. Preuss. Geol. Landesanstalt*. Bd. XLII, 1921. S. 472.

1) Koniferenholzer aus Kreide und Jura tropischer Breiten zeigen keine Jahresringe. Vgl. W. GOTHAN: Die Frage der Klimadifferenzierung im Jura und in der Kreideformation im Lichte paläobotanischer Tatsachen. *Jahrb. d. Preuss. Geol. Landesanstalt*. Bd. XXIX, 1908. S. 220.

2) R. KRÄUSEL: Beiträge zur Kenntnis der fossilen Flora Südamerikas. I. Fossile Holzer aus Patagonien und benachbarten Gebieten. S. 10. *Arkiv f. Botanik*, Bd. 19, 1924. No. 9. Stockholm.

3) *Voltzia coburgensis* HOLDEN ist triadisch. Einige Holzer mit fraglichem triadischen Alter, welche von KRÄUSEL zu den *Protopinaceae* gestellt wurden, sind nach ECKHOLD unbestimmbar, ihrer mangelhaften Erhaltung wegen.

4) O. POSTHUMUS: *Plantae. Feestbundel Prof. MARTIN*. Leidsche Geol. Meded. Bd. V, 1931. Deel I: De palaeontologie en stratigraphie van N. O. I., S. 488.

FELIX hat von Timor beschrieben: *Araucarioxylon Martensi* FELIX¹⁾. Die Beschreibung ist ungenügend. Die Tracheidenhoftüpfel scheinen denjenigen des Soegi-Holzes einigermaßen ähnlich. Das Alter dieses Holzes ist unbekannt.

POSTHUMUS gibt *Dadoxylon* sp. an aus den pflanzenführenden jungpaläozoischen Schichten von Djambi, Sumatra²⁾. Eine Beschreibung ist noch nicht gegeben worden.

Weiter hat POSTHUMUS *Cedroxylon* erwähnt von zwei Stellen³⁾:

a. Aus der oberen Trias von Boeton.

b. Von West Borneo. Das Alter wird nicht angegeben.

SCRIVENOR berichtet, dass POSTHUMUS in Material von Sarawak (Upper Sadong) auch *Cedroxylon* angetroffen hat. Dort kommt es unter Monotisführenden Schichten vor⁴⁾. Keines dieser Hölzer ist jedoch beschrieben worden, was um so mehr bedauernswert ist, weil bis jetzt *Cedroxylon* noch nie mit Sicherheit aus Schichten älter als Tertiär erwähnt worden ist.

SCRIVENOR gibt das Vorkommen Koniferenholzes an von Pahang in Malakka⁵⁾. Dieses Holz ist von SEWARD untersucht worden, der es für *Araucarioxylon* hält. Eine Beschreibung fehlt, die photographische Abbildung eines Tangentialschnittes ist undeutlich. Das Holz ist triadisch oder älter.

Das Fehlen von Beschreibungen der in Ost-Indien und Malakka gefundenen fossilen Koniferen macht also eine Vergleichung mit dem Soegi-Holz unmöglich.

Bussum, 17 April, 1932.

1) J. B. SCRIVENOR: loc. cit. S. 78, 79. Fig. 11.

2) J. FELIX: Untersuchungen über fossile Hölzer. 3tes Stück. Zschr. d. Deutschen Geol. Ges., Bd. XXXIX, 1887. S. 519.

3) O. POSTHUMUS: Eenige opmerkingen betreffende de palaeozoïsche flora van Djambi. Verh. Kon. Akad. v. Wetensch. XXXVI, 1927. S. 429.

ZWIERZYCKI & POSTHUMUS: De palaeobotanische Djambi-expeditie. Tschr. Kon. Ned. Aandr. Gen., 2de serie, XLIII, 1926. S. 210.

4) O. POSTHUMUS: On palaeobotanical investigations in the Dutch East Indies and adjacent regions. Bull. d. Jardin Bot. de Buitenzorg. Sér. III, Vol. 10, 1929. S. 378.

5) J. B. SCRIVENOR: loc. cit. S. 80.

Geology. — *The tertiary virgations on Java and Sumatra, their relation and origin.* By G. L. SMIT SIBINGA. (Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

More than once already the attention has been drawn to the remarkable fact of the virgations of the Barison fold-axes on Sumatra, i.e. the property of these axes to diverge successively towards the east and to disappear one by one in the adjoining tertiary geosyncline, causing a gradual nar-

owing of the mountainbelt from north to south. This branching of the trend lines is most clearly visible in the region between the Highlands of Padang and the Lampong Districts.

Less distinctly the same phenomenon may be observed on Java, however in an opposite sense. Several anticlinoria deviate in a northern direction from the geanticlinal axis of the island, so that the javanese virgations form more or less the reflected image of the sumatranese ones. A satisfactory explanation of this phenomenon, thus occurring as well on Java as on Sumatra, has not yet been given.

The object of this communication is to trace the relations between both systems of branching trend lines and to give a reasonable explanation of the origin of this remarkable phenomenon.

Sumatra.

In the middle and southern part of Sumatra, from north to south, the following anticlinoria can be discerned as tectonic units:

1. The Suligi-Lipatkain-range with the adjoining Bt. Kelam fold, running nearly parallel to it, which anticlinorium firstly plunging to the east, reappears afterwards in the Tigapuluh-mountainrange. Having passed the Batang Hari, it finally disappears under the Quaternary of the Lalang river.

2. The Udjung-Bt. Serasah- and Lisun-Kwantan-Lalo-ranges with their eastern continuation: the Bt. Limau, finishing in the Kilis-Ketalo-fold. This anticlinorium is rooted in the Barisan in the region of Tapanuli.

3. The Prebarisan-ranges, continuing by broad folds via the Duablas-mountains to the east up to the Palambang-Bt. Batu-anticline, which disappears under the Quaternary of the coastplain. This anticlinorium is rooted in the Barisan southeast of Padang.

4. The Tembesi-Rawas-range, continuing via the Bt. Pendoppo and disappearing in the Limau- and Prabamulih-folds under the Quaternary of the Ogan river. It is rooted in the Barisan in the region of the G. Pandan.

5. The Gumai-mountainrange, continuing in the Muara-enim- and Baturadja-anticlinoria.

6. The Bt. Garba-range, the continuation of which is still unknown.

7. The Benkulen-Bt. Sawoh-ranges.

On fig. 1 the main trend lines of the 7 anticlinoria are indicated and numbered conformably.

All these anticlinoria proceed from the Barisan, diverge with the geanticlinal axis of this mountainrange (Sumatra-direction) and disappear towards the east under younger deposits.

Java.

The plan of Java is similar to that of Sumatra, although the branching of the tertiary trend lines is not so distinctly pronounced. On closer inspection, however, a configuration analogous to that on Sumatra can be established. The javanese geanticlinal axis, the analogon of the sumatranese

Barisan, is mostly covered by tertiary and still younger strata. Only in three limited areas it reaches the surface (Tjiletu, Lokula, Djiwo), which

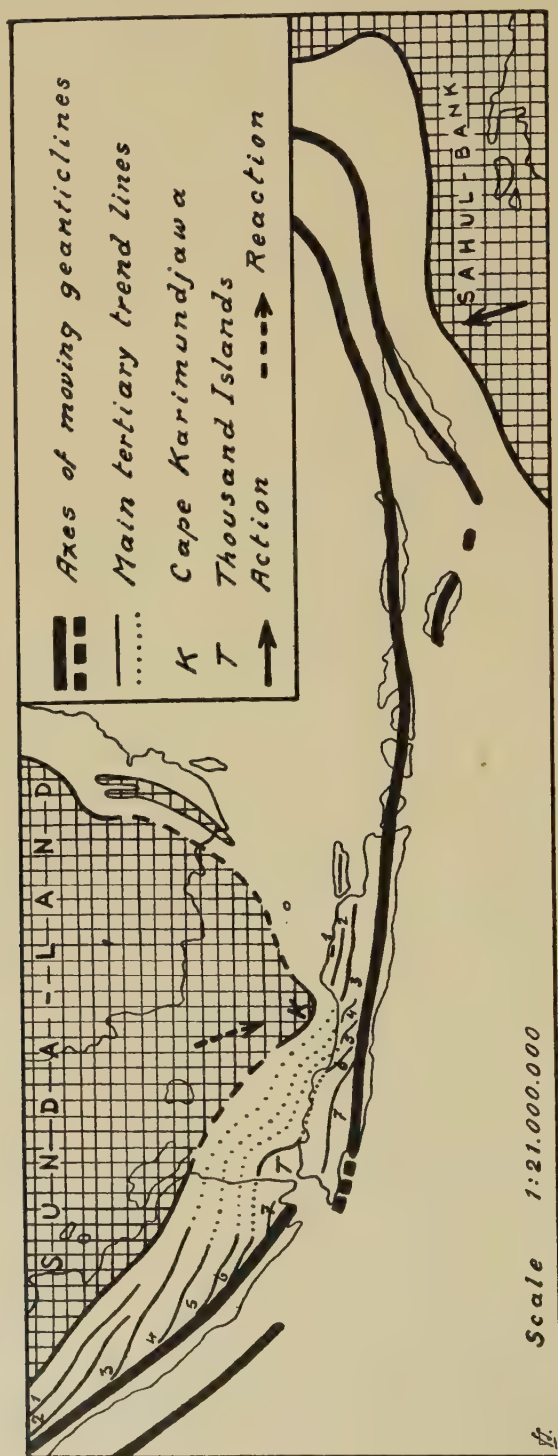


Fig. 1. Sketchy outlines of the tertiary folding-scheme on Java and Sumatra.

three points approximately define its main trend, nearly coinciding with the longer axis of the island (Java-direction).

The following anticlinoria can be discerned as tectonic units on Java:

1 and 2. In the younger Tertiary of Northern Rembang and Madura two anticlinoria with a general trend parallel to the axis of the island, in the middle part slightly bending off to the north:

3. The Southern Rembang-anticlinorium, running for the greater part parallel to the Java-direction and showing a slight northward divergence near Semarang.

4. The anticlinorium southwest of the Ungaran, widely diverging from the Java-axis.

5. The anticlinorium rising west of Worawari, continuing between the Slamet- and Kendeng-volcanoes up to in the district of Pekalongan, likewise strongly diverging from the general Java-direction.

6. The anticlinorium emerging south of Prupug from young volcanic deposits, continuing up to about Cheribon.

7. The anticlinorium rising south of Banjumas and continuing through the districts of Eastern Priangan, Krawang and Bantam.

On the accompanying map the main trend lines of these 7 anticlinoria are indicated and numbered conformably. The latter four strongly diverge from the geanticlinal axis of the island, the Southern Rembang-anticlinorium however only slightly in its most western part.

The roots of the diverging anticlinoria cannot be observed as clearly as on Sumatra on account of the slight degree of Java's upheaval and consequently its but fragmentary perceptible backbone. However the roots of the anticlinoria 5 and 7 e.g. are distinctly recognizable. The undeniable element of congruency between the javanese and sumatranese systems of branching trend lines is striking, on the understanding that both are developed in an opposite sense to each other and form more or less each other's reflected image.

The primary connection between Java and Sumatra.

The question now arises: does there exist some relation between both reflected images and what may be or may have been this relation.

In answering this question we must not lose sight of the fact, that the present situation of Java with regard to Sumatra is not a primary one¹⁾.

The following facts may prove this. The great stratigraphical conformity between the tertiary strata of the Bantam- and Lampong districts show that both originally have been deposited in one and the same geosynclinal basin. At present, however, the javanese part of this basin is situated in the elongated trend of the pretertiary Barisan, therefore, with regard to the sumatranese part of the basin many tens of kilometres displaced towards the south. The same applies to the javanese geanticlinal axis, the analogon and pro-

¹⁾ L. J. C. VAN ES, De tektoniek van de westelijke helft van den Oost-Indischen archipel. Jaarb. v.h. Mijneuzen in Ned. Oost-Indië. Verhand. II, 1917, p. 110, 111.

longation of the Barisan. Its most western part, situated south of Bantam and during the Paleogene still above sealevel, with regard to the sumatranese Barisan-end, has at present, in a similar way, been displaced many tens of kilometres towards the south.

Sometimes the divergent opinion is met with, that the southern end of Sumatra with regard to Western Java has been displaced towards the north. Although the effect apparently is the same, there is a fundamental diversity between both points of view, which here however can be left out of consideration. To the first mentioned conception the preference has to be given, if only for this reason, that it is supported by the distribution of the epicentra of earthquakes, which show a considerably greater frequency on the southcoast of Western Java than on the coast of Benkulen ¹⁾).

The bending of the geanticlinal axis between Sumatra and Java firstly brought the javanese axis out of the Sumatra-direction into a more west-eastern position. Afterwards, in consequence of the intensified bending and through a second cause, which will be discussed further below, the still joint geanticlinal axis was broken at the bendingpoint (Sunda Straits). The javanese part was bent still further into the present Java-direction, while Western Java with regard to Southern Sumatra was displaced considerably to the south.

BROUWER ²⁾ already repeatedly pointed out that considerable transverse fractures near the surface of moving geanticlines coincide with their bending-points. Sunda Straits now is one of the most typical examples in the western part of the Archipelago, representing such a bendingpoint and likewise the locus of transverse fractures, caused by considerable horizontal movements.

In answering the question put above: which relation can there exist between both systems of branching trend lines on Java and Sumatra? it should be born in mind that a complicated horizontal movement has disturbed the primary connection between both parts of the geanticline as well as of the adjoining geosyncline, i.e. a sharp bending and consequently fracturing, complicated by faulting and considerable horizontal displacement of the javanese part.

The thousand islands.

How radically the primary connection between Java and Sumatra at present may be disturbed, yet one link still exists, i.e. the row of small islands, which connects Java with Sumatra: the group of the Thousand Islands.

UMBROGROVE ³⁾ has suggested that the coral reefs of this row of islands

¹⁾ S. W. VISSER, On the distribution of earthquakes in the Netherlands East Indian Archipelago. II, 1920—1926, 1930.

²⁾ H. A. BROUWER, The horizontal movement of geanticlines and the fractures near their surface. Journal of Geology, Vol. XXIX (1921).

H. A. BROUWER, The Geology of the Netherlands East Indies, 1925, p. 63, 89, 90.

³⁾ J. H. F. UMBROGROVE, De koraalriffen der Duizendeilanden (Javazee). Summary in English. Wetensch. Meded. v. d. Mijnbouw in Ned. Indië, No. 12, 1929.

could have been developed on a ridge-shaped elevation of perhaps anti-clinal character, already existing in the Pleistocene. Although it has so far not been possible to establish the correctness of this supposition, it seems however highly probable. For, on Java as well as on Sumatra the tertiary folds pitch under the quaternary coastplains. Now one can hardly assume, that in a system of folds as extensive and as regular in its main features as that of the Java-Sumatra-geosyncline, these folds would suddenly terminate, to be covered subsequently by younger deposits. On the contrary, no argument can be advanced against the opinion, that also those parts of the tertiary geosynclinal basin, which at present are withdrawn from direct observation, must have a tectonic structure similar to that of the area's, which are accessible to direct observation. Moreover we know, that the tertiary folding on Sumatra extends to the border of the relatively stable Sundaland, nay, that the adaptation of the folds to that border is so exact, that the latter has been reconstructed according to the scheme of these tertiary fold-axes ¹⁾. Is it logical, to assume, that the same system of fold-axes elsewhere does not extend to the border of the Sundaland and does not adapt itself to it in the same way, but has come to a sudden stop, because we are not able to observe it any longer?

The existing relation between the scheme of folding and the geosyncline's border in the sumatranese part, implies a conformable or nearly conformable relation in the javanese part. I.o.w. if on Sumatra the whole tertiary geosyncline is folded from the Barisan up to the boundary of the Sundaland, in the corresponding part on Java the same must have happened, as well in the area's accessible to direct observation as in those parts of the geosyncline which at present are withdrawn from direct observation by younger deposits and by the sea.

Furthermore it is obvious, that the arc of the Thousand Islands cannot represent an isolated fold-axis within a section of the geosynclinal basin, for the rest devoid of folds. Tectonically it is only thinkable and comprehensible, if it is a part of the whole geosynclinal folding-plan. As such, it forms an important link between the two parts of the system accessible to observation on Java and Sumatra.

The southern border of the Sundaland.

Before tracing further, which relation could have existed between the virgations on Java and Sumatra, we have to ascertain, how far the tertiary folding on both islands extended towards the north, i.e. where the northern border of the tertiary geosyncline, i.e. the southern border of the Sundaland was situated. ZWIERZYCKI (l.c.) lately tried to deduce the southern boundary from the direction of the tertiary folds and their rate of compression, considering the Sundaland as foreland. In following this method, the great

¹⁾ J. ZWIERZYCKI, Toelichting bij de geotektonische kaart van Nederlandsch Indië. Summary in English. Jaarb. Mijnwezen Ned. Indië, Verh. 1929.

difficulty is, that in those parts of the geosyncline, which are not accessible to direct observation, the direction and intensity of folding are unknown, but can only be indicated approximately by extrapolation. An exact delimitation of the Sundaland in this way seems therefore as yet scarcely possible. For the time being we can only connect those points, which are for certain lying outside the tertiary geosynclinal area and which belong to the more stable Sundaland. As such points can be considered on Sumatra e.g. the eruptive rock near Pakanbaru, the pretertiary coastsills at the B. Hari and, northeast of Palembang and north of Java, only the group of the Karimundjawa Islands.

The situation of the southern border of the Sundaland, deduced from these points shows, that for a not unimportant part of the Java-sea, including the area of the Thousand Islands, the possibility, nay, the probability of the existence of tertiary folding under recent deposits is given. In future more detailed data about submarine topography than at present at our disposal will doubtless procure further information about the direction of the main trend lines in this part of the geosyncline. For the present, only the arc of the Thousand Islands can be considered as a trend line, while the continuation of the main trend lines on Java and Sumatra can be deduced approximately by extrapolation (dotted on the map).

The southern border of the Sundaland shows, off the Karimundjawa Islands, an outstanding cape, here briefly called Cape Karimundjawa. From the intensive compression of the Neogene between Cheribon and Semarang and the slighter folding west and east of this section, ZWIERZYCKI (l.c.) has drawn the conclusion that an outlying peninsula of the Sundaland must be situated opposite the compressed zone. This cannot but be Cape Karimundjawa. The slighter folded sections of Batavia-Bantam and Northern Rembang-Madura must be situated opposite corresponding depressions in the Sundaland.

The origin of the virgations on Java and Sumatra.

The foregoing statements lead to the following conclusions:

1. the tertiary plans of folding on Java and Sumatra show great regularity and conformity;
2. both belong to one and the same folded geosyncline and consequently to one and the same plan of folding;
3. no reasonable grounds can be adduced in support of the supposition, that the geosyncline should not be folded, where it is withdrawn from direct observation;
4. the primary connection between the sumatranese and javanese part of the geosyncline however has been disturbed in consequence of a complicated movement of the javanese part;
5. the row of the Thousand Islands represents a still perceptible link of this former connection.

If we now consider the separated parts of the geosyncline in their former

connection, the great regularity of the whole plan of tertiary folding is striking. The remarkable branching of the trend lines on either part, be it

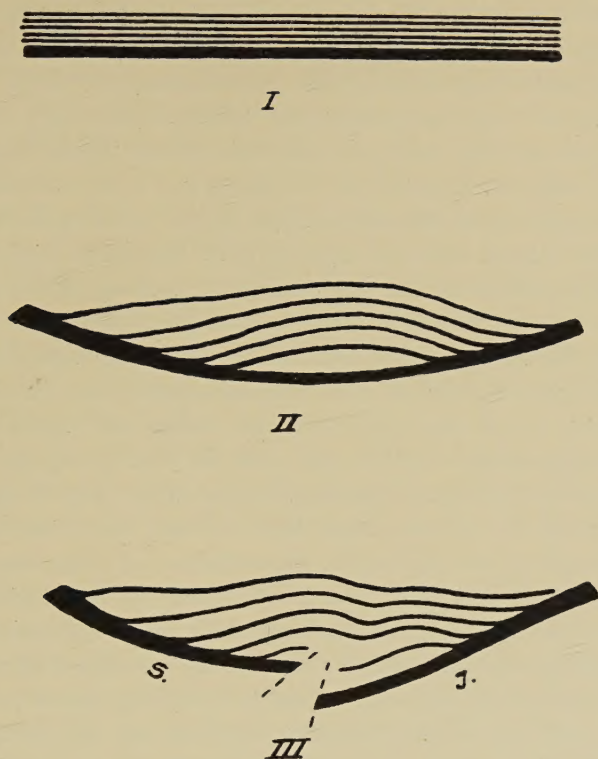


Fig. 2. Schematic representation of the genesis of the tertiary system of complementary virgations on Java and Sumatra.

in an opposite sense, brought in this way in complementary relation, gets a particular significance. The anticlinoria, which on Sumatra successively bend off the geanticlinal axis, causing its gradual narrowing, join this axis again on Java or run almost parallel to it, the same as inversely. The whole system of branching anticlinoria proves to be the result of the bending of the primary joint-geanticlinal axis.

Fig. 2 shows, schematically, the genesis of the tertiary plan of folding and branching in three stages.

Fig. 2, I represents the primary and theoretically regular, geosynclinal folding, parallel to the still joint, uncurved and unfractured geanticlinal axis.

Fig. 2, II shows the genesis of the complementary virgations on Sumatra and Java, caused by the bending of the still joint axis.

Fig. 2, III finally represents, on the same scale as the map, but somewhat schematized, the present plan, originated after the fracturing of the axis and faulting of the eastern, javanese section.

This schematized process gives a simple and reasonable explanation of the genesis of complementary virgations on Java and Sumatra.

We now have to trace the forces, which caused the bending and, ultimately, the fracturing of the Sunda-geanticline at the bendingpoint in Sunda Straits. Though east of the Djiwo-hills, neither on Java nor on the minor Sunda-Islands, pretertiary rocks of the substructure have been found, it is generally accepted, that the pretertiary Sumatra-Java-core continues at greater depth towards the east and that these minor Sunda-Islands belong to the same geanticline. If therefore the forces are to be considered, which in tertiary time acted upon the western part of the Sunda-geanticline, it will be necessary to keep in view the eastern part. Now we know, that in the eastern, unstable portion of the Archipelago in tertiary and even younger time enormous forces have acted, which caused great horizontal movements. On Timor e.g. alpine structures could arise, while the Timor-arc was exposed to such a stress, that it was pressed against the Sunda-arc. The Sunda-geanticline could not withstand this stress and receded, but was nevertheless compressed at such a rate, that the lack of younger volcanism between Pantar and Dammer has been imputed by BROUWER¹⁾ to that compression. Thus it is quite certain, that not only the Timor-geanticline, but also the Sunda-geanticline under the influence of compressional stress, originating with the Sahul-bank, which constitutes the Australian continental shelf, must have been displaced considerably in an horizontal direction.

In the foregoing we have pointed out, that the movement of the javanese part of the Sunda-geanticline with regard to the sumatranese part has been a complicated one, i.e. a sharp bending followed by fracturing and considerable faulting. The curving of the Sunda-geanticline at the bendingpoint in Sunda Straits can easily be explained by the stress, acting at the eastern part of the geanticline. So far also the process of folding and branching in the western part of the adjoining geosyncline can readily be explained by transmission of the forces, acting in the eastern part of the geanticline and causing counter-pressure (reaction) of the stable Sunda-land. The displacement of Java with regard to Sumatra and the radical disturbance of the primary connection, however, near the submarine locus of the bendingpoint, forms a complication, which cannot sufficiently be cleared up by this mechanism only.

Fixing the southern border of the Sunda-land, the attention has been drawn to the group of the Karimundjava Islands and the important part acted by this most southern cape of the Sundaland in the process of folding of middle Java. Cape Karimundjava, being a pretertiary consolidated obstaculum, now proves to have caused the complication in the Java-movement. It prevented the javanese part of the Sunda-geanticline from further bending and forced its fracturing at the bendingpoint in Sunda Straits.

¹⁾ H. A. BROUWER, On the non-existence of active volcanoes between Pantar and Dammer, in connection with the Tectonic movements in this region. These Proceedings XXI, 1917.

Summarizing, the following line of thought may elucidate the whole process.

Northward directed forces acting on the eastern part of the Sunda-geanticline, pressed the western part off Java and Sumatra against the stable Sunda-land, folding the interjacent tertiary geosyncline, at first normally. Continued stress in the east caused bending of the geanticline. Consequently on Java and Sumatra at the concave side of the curve, opposite a depression in the Sunda-land, complementary virgations originated. Opposite Cape Karimundjawa the strongest compression of the tertiary geosyncline took place, which caused the differing and complicated tectonic structure of alpine character in Middle-Java (Lokula). By still continued stress in the east, Middle-Java, arrested by Cape Karimundjawa, did neither allow of further compression, nor bending. Consequently the transmitted stress, concentrated on the geanticlinal bendingpoint, caused the fracturing and faulting of the geanticlinal axis at Sunda Straits and the displacement of Western Java to the south.

The line of thought, developed here, gives a simple and reasonable explanation of several apparently heterogeneous phenomena in the plan of tertiary folding on Java and Sumatra, as e.g. that of the complementary virgations.

In the following lines the direction of the stress will be briefly discussed.

The tertiary folding on Java and Sumatra is generally considered to be directed towards the Sunda-land, on Timor however towards the Sahul-bank. Now one may dispute long and fruitlessly about directions of stress. One thing however should always be borne in mind, namely, that primary pressure (action) on the one side, always causes counter-pressure (reaction) on the other side. A geosyncline, folded by compressional stress will meet action on the one border, reaction on the other. On the side of the stronger folding, the primary action, on the side of slighter folding the secondary reaction will be found. In the case before us, the pressure lies not directly opposite to the counterpressure, but form more or less a torsion-system. Notwithstanding this, the effect of compressional stress on Timor has been undoubtedly stronger than on Sumatra and Java, so that the primary action must have originated with the Sahul-bank (full arrow), the reaction with the Sunda-land (dotted arrow).

Relation between the plan of branching and the distribution of volcanoes.

Finally some words may be added about the relation between the system of branching anticlinoria and the distribution of quaternary volcanism.

The following remarkable facts may be stated:

In Middle and Southern Sumatra the great majority of extinct and still active quaternary volcanoes is situated on the geanticlinal axis. The row of the Barisan-volcanoes however is not continual but intermittent, in this sense, that quaternary volcanism always is lacking in the sections, where anticlinoria are rooted in the Barisan. As soon as the diverging ranges have

left the geanticlinal axis, quaternary volcanism starts, extending often at some distance into the characteristic depressions between the diverging anticlinoria. These intercalated synclinal depressions of great amplitude, are filled up by quaternary volcanic tuffs, descending from the separated groups of volcanoes mentioned.

On Java these phenomena are less clearly visible. Closer inspection however shows, that the javanese quaternary volcanoes are situated likewise in separated rows or groups between the branching anticlinoria, and are lacking where these — as far as observable — are rooted in the geosynclinal axis. This noticeable distribution of younger volcanoes undoubtedly is closely connected with the process of folding and branching as described above. For, the bending off and branching of the anticlinoria will have caused tensional stress just within the depressions between the anticlinoria, so that here in the first place magmatic eruption might be expected.
